Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2017

Práctica 1: Grupos — Primera parte

Definiciones y ejemplos

1. Probar que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determinar cuáles de ellos son cíclicos.

(*a*) $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;

(*b*) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;

(*c*) $\mathbb{G}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{p^n}$ donde p es un número primo.

2. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen

$$\mathsf{GL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A \neq 0\},$$
$$\mathsf{SL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A = 1\}.$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Describirlos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

3. *Grupo opuesto.* Sea $(G, \star)$ un grupo. El *grupo opuesto* de G tiene el mismo conjunto subyacente que G y su operación $\star_{\mathrm{op}}$ está dada por

$$\star_{\mathrm{op}} : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto h \star g \in G^{\mathrm{op}}.$$

Probar que $(G^{\mathrm{op}}, \star_{\mathrm{op}})$ es un grupo.

4. Sea G un grupo tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$. Probar que G es abeliano.

5. Sean G un grupo, X un conjunto y G^X el conjunto de las funciones $f : X \to G$. Dotamos a G^X del producto $\star$ dado por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que $(G^X, \star)$ es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

6. *Producto directo.* Sean G y H dos grupos. El *producto directo* de G y H es el conjunto $G \times H$ con la operación dada por

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Probar que $G \times H$ es un grupo y que $G \times H$ es abeliano sii G y H son abelianos.

7. *$\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales.* Sean p un número primo y G un grupo abeliano tal que todo elemento de G distinto del neutro tiene orden p.

(*a*) Probar que es posible definir una estructura de $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial en G.

(*b*) Supongamos además que G es finito. Probar que existen $n \in \mathbb{N}_0$ y un isomorfismo de $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales $G \cong (\mathbb{Z}_p)^n$.

Subgrupos

8. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones.

(*a*) H es un subgrupo de G;

(*b*) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy^{-1} pertenece a H.

Si además H es finito, estas afirmaciones son equivalentes a

(c) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy pertenece a H.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando H es infinito.

9. Sean G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

10. Dado un grupo G, sea H el subconjunto de elementos de orden finito. ¿Es H un subgrupo de G?

11. (a) Sean G un grupo, $g \in G$ un elemento de orden finito y $m \in \mathbb{N}$. Calcular $\operatorname{ord}(g^m)$.

(b) Sean G y H grupos y $g \in G$ y $h \in H$ elementos de orden finito. Probar que el orden de (g, h) en $G \times H$ es el mínimo común múltiplo de $\operatorname{ord}(g)$ y $\operatorname{ord}(h)$.

12. Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{H}$, D_4 y $\mathbb{G}_n$.

13. Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n\rangle$ sii m y n son coprimos.

14. Probar que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.

15. (a) Probar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

(b) Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p\rangle$ es un subgrupo maximal de G.

(c) Probar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico y tiene como orden una potencia de un número primo.

16. Sea $G \subseteq \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

17. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S\rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*.

(i) Probar que $\mathbb{H}_n$ es finito.

†(ii) Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

(b) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ y sean α, $\beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathsf{id}$ y sin embargo $\alpha\beta$ tiene orden infinito.

18. Si G es un grupo y $A, B \subseteq G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Supongamos que A y B son subgrupos. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

(b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B\rangle$ y $AB = BA$.

(c) Si $AB = BA$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

(d) Si $G = AB$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y notamos $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. El *grupo simétrico* $\mathbb{S}_n$ es el grupo formado por las funciones $f : [n] \to [n]$ biyectivas, con la composición como operación.

19. *Ciclos.* Decimos que un elemento $\tau \in \mathbb{S}_n$ es un *ciclo* si existe un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subseteq [n]$ de forma que $\tau(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$, $\tau(a_r) = a_1$, y $\tau(x) = x$ si $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$. En ese caso escribimos $\tau = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_r)$.

(*a*) Probar que $\rho \circ (a_1\, a_2\, \ldots\, a_r) \circ \rho^{-1} = (\rho(a_1)\, \rho(a_2)\, \ldots\, \rho(a_r))$ para todo $\rho \in S_n$.

(*b*) Dos ciclos $(a_1\, a_2 \ldots\, a_r)$ y $(b_1\, \ldots\, b_s)$ se dicen disjuntos si $\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \varnothing$. Probar que dos ciclos disjuntos conmutan entre sí. ¿Vale la recíproca?

(*c*) Probar que todo elemento de $\mathbb{S}_n$ se escribe como composición de ciclos disjuntos, y que los ciclos que aparecen en dicha composición están unívocamente determinados.

20. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos genera $\mathbb{S}_n$.

(*a*) $\{(i\, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,

(*b*) $\{(1\, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$,

(*c*) $\{(i\ \ i+1) \mid 1 \leq i < n\}$,

(*d*) $\{(1\, 2),\ (1\, 2\, 3 \ldots n)\}$.

Subgrupos normales

21. Sea G un grupo.

(*a*) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

(*b*) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto. Probar que existe un menor —con respecto a la inclusión— subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

(*c*) Supongamos que $X \subseteq G$ es un conjunto tal que $gXg^{-1} \subseteq X$ para todo $g \in G$. Probar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

22. (*a*) Sea G un grupo y sea $N \subseteq G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$. Mostrar que N es normal.

(*b*) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Probar que H es un subgrupo de G. Por otro lado, si $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, mostrar que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

23. Sean G un grupo y $a, b \in G$. El *conmutador de a y b* es $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Llamamos $[G, G]$ al subgrupo generado por $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$.

(*a*) Probar que $[G, G]$ es normal en G.

(*b*) Probar que G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

(*c*) Hallar $[D_n, D_n]$ y $[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$.

24. Sea G un grupo. Se define el *centro* de G como $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

(*a*) Probar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G.

(*b*) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Probar que

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

(*c*) Encontrar el centro de un grupo abeliano y el de $\mathbb{H}$.

(*d*) Para cada $n \geq 1$ encontrar el centro de D_n, de $\mathbb{S}_n$ y de $\mathsf{GL}_n(R)$ con $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$.

(*e*) Sea X un conjunto cualquiera. Determinar el centro de G^X.

25. Sea G un grupo.

(*a*) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G y que es el subgrupo más grande de G en el que g es central.

(*b*) Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G \mid nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G.

(*c*) Probar que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N \rangle) = \mathsf{C}(N)$.

(*d*) Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Probar que se trata de un subgrupo de G. Probar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

26. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

(*a*) Probar que si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

(*b*) Probar que si los dos son normales, entonces HK es un subgrupo normal de G.

Morfismos y cocientes

27. Sean G un grupo y X un conjunto. Dado $x_0 \in X$ definimos $\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G$. Mostrar que ev_{x_0} es un morfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

28. Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo entre G y su grupo opuesto.

29. *Signo de una permutación.* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\sigma \in S_n$ definimos $p_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ como la matriz cuya i-ésima columna es el vector $e_{\sigma(i)}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) $\det p_\sigma = \pm 1$.

(*b*) La función $\sigma \in S_n \mapsto p_\sigma \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es un morfismo inyectivo de grupos.

(*c*) La función $\operatorname{sgn} : \sigma \in S_n \mapsto \det p_\sigma \in \{\pm 1\}$ es un morfismo de grupos. En particular $A_n = \ker(\operatorname{sgn})$ es un subgrupo propio normal de S_n, llamado el n-ésimo *grupo alternante*.

(*d*) Si $\tau = (i\,j)$ entonces $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Deducir que $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (resp. -1) sii σ se escribe como composición de un número par (resp. impar) de transposiciones.

30. Sea G un grupo. Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

31. Determinar $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

32. Sea G un grupo. En cada caso, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación sea un morfismo de grupos.

(*a*) $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$

(*b*) $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$

(*c*) $g \in G \mapsto g^2 \in G$

33. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que si $(m, n) = 1$ entonces $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

34. Sean G y H grupos, y sea $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los morfismos de grupos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encontrar condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

35. Sea G un grupo.

(*a*) Dado $g \in G$, sea $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

(*b*) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos.

(*c*) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

(*d*) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

36. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos.

(*a*) Probar que $f([G,G]) \subseteq [H,H]$.

(*b*) ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subseteq \mathsf{Z}(H)$?

37. Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si $f(H) \subseteq H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$.

(*b*) $\mathsf{Z}(G)$ y $[G,G]$ son subgrupos característicos de G.

(*c*) Si H es un subgrupo característico de G entonces H es normal en G.

(*d*) Si H es el único subgrupo de G de orden $|H|$ entonces es característico.

(*e*) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces K es un subgrupo característico de G. Comparar con el ejercicio **??**.

(*f*) Si $H \trianglelefteq G$ y K es un subgrupo característico de H, entonces $K \trianglelefteq G$.

38. (*a*) Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{Z}_2^2$, encontrar un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{S}_3$.

(*b*) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de $\mathbb{S}_3$. Mostrar que cada automorfismo de $\mathbb{S}_3$ induce una permutación de X y deducir que $\mathsf{Aut}(\mathbb{S}_3) \cong \mathbb{S}_3$.

39. Mostrar que

(*a*) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(*b*) $\mathsf{GL}_n(\mathbb{k})/\,\mathsf{SL}_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^\times$ si $\mathbb{k}$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(*c*) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(*d*) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$;

(*e*) $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$ para cualquier grupo G.

40. (*a*) Probar que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

(*b*) Probar que si G es un grupo no abeliano entonces $\mathsf{Inn}(G)$ no es cíclico.

41. Sean G un grupo y H y K subgrupos normales de G.

(*a*) Mostrar que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$. ¿Cuándo es un isomorfismo?

(*b*) Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $G \cap H = 1$ entonces G es abeliano.

42. Sean G un grupo y H un subgrupo. Probar que $[G,G] \subseteq H$ sii $H \trianglelefteq G$ y G/H es abeliano.