

Topología - Práctica VII

1. Probar que si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces es una aplicación abierta.
2. Probar que si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ es un revestimiento.
3. Sea Y un espacio topológico discreto. Probar que dado X cualquier espacio topológico, la proyección en la primer coordenada $p : X \times Y \rightarrow X$ es un revestimiento.
4. Probar que la función $p : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f(z) = z^n$ es un revestimiento.
5. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento, con B conexo. Probar que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En ese caso E se llama un revestimiento de B de k hojas.
6. Sean $p : X \rightarrow Y$ y $q : Y \rightarrow Z$ revestimientos.
 - a) Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $q \circ p : X \rightarrow Z$ es un revestimiento.
 - b) Probar que el teorema falla si $q^{-1}(z)$ no es finito.
7. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento. Supongamos que B es conexo y localmente conexo. Mostrar que si C es una componente de E , entonces $p|_C : C \rightarrow B$ es un revestimiento.
8. Consideremos el toro $T = S^1 \times S^1$. Sabemos que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y que su revestimiento universal es el producto de dos copias del revestimiento universal de S^1 . Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hallar el revestimiento correspondiente.
 - a) El subgrupo generado por el elemento $(1, 0)$.
 - b) El subgrupo generado por el elemento $(1, 1)$.
 - c) El subgrupo $H = \{(2n, 2m) : m, n \in \mathbb{Z}\}$.
9. Sea A un subespacio de un espacio topológico X . Decimos que A es un retracto fuerte por deformación si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x && \text{para } x \in X, \\ H(x, 1) &\in A && \text{para } x \in X, \\ H(a, t) &= a && \text{para } a \in A \text{ y } t \in I. \end{aligned}$$

Observar que en particular $H(-, t)$ es una retracción para todo t .

Probar que si $a_0 \in A$, la inclusión $j : (A, a_0) \rightarrow (X, a_0)$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales.

10. Calcular los grupos fundamentales de
 - a) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.
 - b) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
 - c) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

- d) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.
- e) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
11. Sea $h : (S^1, 1) \rightarrow (Y, y_0)$. Probar que si h_* es el morfismo cero, entonces h es homotópica a una constante. (Sug: sea $\phi : I \rightarrow S^1$ el lazo que da una vuelta en el sentido horario; sea $f = h \circ \phi$. Probar que hay una homotopía F entre f y el lazo constante y_0 , y que F induce una función $H : S^1 \times I \rightarrow Y$ tal que $H \circ (\varphi \times i_I) = F$.)
12. Se dice que una función $h : S^n \rightarrow S^m$ preserva antípodas si $h(-x) = -h(x)$ para cada $x \in S^n$. Se tiene el siguiente teorema cuya demostración se hará en la práctica.
- Teorema (Borsuk-Ulam):** *No existe ninguna función $f : S^m \rightarrow S^1$ que preserve antípodas.*
13. Asumiendo cierto el teorema de Borsuk-Ulam, probar los siguientes teoremas
- a) **Teorema:** *Dada una función continua $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*
- b) **Teorema meteorológico:** *En cada instante existen dos puntos antipodales en la superficie de la tierra con la misma temperatura y presión atmosférica.*
- c) **Teorema:** *Si $g : S^2 \rightarrow S^2$ es continua y $g(x) \neq g(-x)$ para todo x , entonces g es suryectiva.*
14. Sea A un subespacio de X ; $j : A \rightarrow X$ la inclusión, y sea $f : X \rightarrow A$ una función continua. Supongamos que la función $j \circ f : X \rightarrow X$ es homotópica a la identidad $id_X : X \rightarrow X$ mediante una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$.
- a) Mostrar que si $H(a, t) \in A$ para todo $a \in A$, entonces j_* y f_* son isomorfismos.
- b) Si f es una retracción, entonces j_* y f_* son isomorfismos.
- c) Mostrar que no siempre j_* y f_* son isomorfismos.