

Topología - Práctica VI

Notación: Dados X e Y espacios topológicos, notaremos con $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopías de funciones continuas entre X e Y . Si A y B son subconjuntos de X e Y respectivamente, notaremos con $[(X, A), (Y, B)]$ al conjunto de clases de homotopías de funciones continuas f entre X e Y tales que $f(A) \subseteq B$ (las funciones intermedias en la homotopía también mandan el conjunto A en B). Cuando $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$ notaremos a $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ con $[X, Y]'$

1. Mostrar que si $h, h' : X \rightarrow Y$ son homotópicas y $k, k' : X \rightarrow Z$ son homotópicas, entonces $k \circ h$ y $k' \circ h'$ son homotópicas.
2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo. Mostrar que dos caminos con los mismos extremos son homotópicos.
 - a) Sea $I = [0, 1]$. Mostrar que para cualquier X , el conjunto $[X, I]$ consta de un único elemento.
 - b) Mostrar que si Y es arco-conexo, el conjunto $[I, Y]$ consta de un único elemento.
3. Un espacio X se dice *contráctil* si la función identidad $i_X : X \rightarrow X$ es homotópica a una función constante.
 - a) Mostrar que I y \mathbb{R} son contráctiles.
 - b) Mostrar que un espacio contráctil es arco-conexo.
 - c) Mostrar que si Y es contráctil, entonces para todo X el conjunto $[X, Y]$ tiene un único punto.
 - d) Mostrar que si X es contráctil e Y es arco-conexo, el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
4. Sean x_0, x_1 dos puntos de un espacio arco-conexo X . Mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos α, β de x_0 a x_1 , $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$. (Dado α un camino de x_0 a x_1 , definimos $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ como $\hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$, donde $[\bar{\alpha}]$ es la clase del camino de vuelta de α .)
5. Sea $A \subseteq X$ y sea $r : X \rightarrow A$ una retracción (i.e., una función continua tal que $r \circ i = id_A$, $i : A \rightarrow X$ la inclusión). Dado $a_0 \in A$, mostrar que $r_* : \pi_1(X, a_0) \rightarrow (A, a_0)$ es suryectiva.
6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Sea $h : (A, a_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Mostrar que si h se extiende a una función continua $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, entonces h_* es el morfismo cero.
7. Sea $h : X \rightarrow Y$ continua. Mostrar que si X es arco-conexo, el homomorfismo inducido por h es independiente del punto base, salvo isomorfismo entre los grupos involucrados. Esto es, si $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1) = y_1$, mostrar que existen isomorfismos ϕ, ψ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$
 Concluir que si $(h_{x_0})_*$ es el morfismo nulo (o suryectivo, o inyectivo), también lo es $(h_{x_1})_*$.
8. Sea G un grupo topológico con multiplicación \cdot y elemento neutro x_0 . Sea $\Omega(G, x_0)$ el conjunto de los lazos basados en x_0 . Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

- a) Mostrar que con \odot , $\Omega(G, x_0)$ es un grupo.
 - b) Mostrar que \odot induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$.
 - c) Probar que las dos operaciones son las mismas (calcular $(f * e_{x_0}) \odot (e_{x_0} * g)$).
 - d) Mostrar que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.
9. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ dos espacios topológicos con puntos base. Mostrar que el grupo fundamental $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo al grupo producto $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.
10. Calcular $\pi_1(X, x_0)$ en cada uno de los siguientes casos (como son todos arco-conexos elegir su punto base favorito).
- a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).
 - b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).
 - c) $X = T$, el toro usual (recordar T es isomorfo a $S^1 \times S^1$), (dibujar los generadores).
 - d) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
 - e) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una variedad lineal de dimensión 1 o 2 (o sea, una recta o un plano).
 - f) $X = \mathbb{R}^n \setminus L$, donde L es una variedad lineal de dimensión arbitraria (pensar primero el caso en que L es un punto, o una recta).
 - g) $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$, donde C es un círculo.
 - h) $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$, donde K es la unión de los tres semiejes no negativos.
 - i) $X = S^n$.
 - j) $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
 - k) $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.