

Topología - Práctica VI

Notación: Dados X e Y espacios topológicos, notaremos con $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopías de funciones continuas entre X e Y . Si x_0 e y_0 son puntos marcados en X e Y respectivamente, notaremos con $[X, Y]'$ al conjunto de clases de homotopías de funciones continuas entre X e Y que mandan el punto x_0 en y_0 (las funciones intermedias en la homotopía también mandan el punto x_0 en y_0).

1. Mostrar que si $h, h' : X \rightarrow Y$ son homotópicas y $k, k' : X \rightarrow Z$ son homotópicas, entonces $k \circ h$ y $k' \circ h'$ son homotópicas.
2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo. Mostrar que dos caminos con los mismos extremos son homotópicos.
3.
 - a) Sea $I = [0, 1]$. Mostrar que para cualquier X , el conjunto $[X, I]$ consta de un único elemento.
 - b) Mostrar que si Y es arco-conexo, el conjunto $[I, Y]$ consta de un único elemento.
4. Un espacio X se dice *contráctil* si la función identidad $i_X : X \rightarrow X$ es homotópica a una función constante.
 - a) Mostrar que I y \mathbb{R} son contráctiles.
 - b) Mostrar que un espacio contráctil es arco-conexo.
 - c) Mostrar que si Y es contráctil, entonces para todo X el conjunto $[X, Y]$ tiene un único punto.
 - d) Mostrar que si X es contráctil e Y es arco-conexo, el conjunto $[X, Y]$ tiene un único elemento.
5. Sean x_0, x_1 dos puntos de un espacio arco-conexo X . Mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos α, β de x_0 a x_1 , $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$. (Dado α un camino de x_0 a x_1 , definimos $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ como $\hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$, donde $[\bar{\alpha}]$ es la clase del camino de vuelta de α .)
6. Sea $A \subseteq X$ y sea $r : X \rightarrow A$ una retracción (i.e., una función continua tal que $r \circ i = id_A$, $i : A \rightarrow X$ la inclusión). Dado $a_0 \in A$, mostrar que $r_* : \pi_1(X, a_0) \rightarrow (A, a_0)$ es suryectiva.
7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Sea $h : (A, a_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Mostrar que si h se extiende a una función continua $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, entonces h_* es el morfismo cero.
8. Sea $h : X \rightarrow Y$ continua. Mostrar que si X es arco-conexo, el homomorfismo inducido por h es independiente del punto base, salvo isomorfismo entre los grupos involucrados. Esto es, si $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1) = y_1$, mostrar que existen isomorfismos ϕ, ψ tales que el siguiente diagrama conmuta