

Topología - Práctica IV

Espectro de un anillo conmutativo

Sea A un anillo conmutativo con unidad. Notaremos

$$\text{Spec}A = \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}.$$

Para un conjunto $E \subseteq A$ definimos

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}A : E \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

1. Probar

a) $V(E) = V(J_E)$ con J_E el ideal generado por E .

b) $V(0) = \text{Spec}A$, $V(1_A) = \emptyset$.

c) $V(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(E_\alpha)$.

d) $V(E \cup E') = V(E) \cup V(E')$.

Por lo tanto existe una topología en $\text{Spec}A$ tal que los conjuntos $V(E)$ son conjuntos cerrados.

Verificar que los conjuntos $D(a) = \text{Spec}A - V(\{a\}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}A : a \notin \mathfrak{p}\}$ forman una base para dicha topología.

e) Si $E \subseteq E'$ entonces $V(E') \subseteq V(E)$.

2. a) Probar que $\mathfrak{p} \in \text{Spec}A$ es cerrado si y sólo si \mathfrak{p} es un ideal maximal de A .

b) Probar que si A es un dominio íntegro el punto correspondiente al ideal (0) es denso.

3. Sea $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar:

a) El morfismo φ induce una función $\tilde{\varphi} : \text{Spec}B \rightarrow \text{Spec}A$, $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ para $\mathfrak{q} \in \text{Spec}B$.

b) $\tilde{\varphi}^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$ para todo $E \subseteq A$.

c) $\tilde{\varphi}^{-1}(D(a)) = D(\varphi(a))$ para todo $a \in A$.

Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es una función continua.

Separación

4. a) Probar que un subespacio de un espacio regular (resp. T_3) es regular (T_3).

b) Probar que el producto de espacios regulares (resp. T_3) es regular (T_3).

5. Probar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es Hausdorff, regular o normal, entonces cada X_α lo es.

6. Probar que si X es totalmente ordenado, entonces es T_3 con la topología del orden.

7. Probar que un subespacio cerrado de un espacio normal (resp. T_4) es normal (T_4).
8. ¿Es \mathbb{R}^ω normal con la topología producto? ¿ Y con la uniforme?

Compacidad

9. Sea A un anillo conmutativo. Probar que $\text{Spec}A$ es casi-compacto.
10. Probar que en \mathbb{R} con la topología del complemento finito todo subconjunto es casi-compacto, pero los únicos cerrados son los conjuntos finitos. Por lo tanto hay conjunto casi-compactos que no son cerrados.
11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, con Y compacto. Probar que f es continua si y sólo si su gráfico,

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es un conjunto cerrado.

12. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, y $W \subseteq X \times Y$ abierto tal que $A \times B \subseteq W$.
Probar que si B es casi-compacto, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \times B \subseteq U \times B \subseteq W$.
Si tanto A como B son casi-compactos, probar que existen abiertos $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ tales que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.
13. a) Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías en X . Supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿La compacidad de alguna de estas topologías implica la compacidad de la otra?
b) Si X es compacto tanto para \mathcal{T} como para \mathcal{T}' entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.
14. Sea G un grupo topológico, $A, B \subseteq G$ subconjuntos de G . Probar que si A es cerrado y B es casi-compacto, entonces $A \cdot B$ es cerrado.
15. Mostrar que \mathbb{Q} no es localmente compacto.
16. Mostrar que $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, si y sólo si cada X_α es localmente compacto y todos los X_α , salvo una cantidad finita, son compactos.
17. a) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y abierta. Demostrar que si X es localmente compacto e Y es Hausdorff, entonces $f(X)$ es localmente compacto.
b) Probar que todo subespacio abierto y todo subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.
18. Probar que la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n es homeomorfa a S^n . (Considerar la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$.)