

## Topología - Práctica III

### Redes

Sea  $\Lambda$  un conjunto no vacío. Una relación  $\preceq$  en  $\Lambda$  se dice un *orden parcial* si :

- I)  $\alpha \preceq \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda$
- II) Si  $\alpha \preceq \beta$  y  $\beta \preceq \gamma \implies \alpha \preceq \gamma$   
Diremos que  $(\Lambda, \preceq)$  es un *conjunto dirigido* si  $\preceq$  es un orden parcial en  $\Lambda$  y además se verifica :
- III) Dados  $\alpha, \beta \in \Lambda$ , existe  $\gamma \in \Lambda$  tal que  $\alpha \preceq \gamma$  y  $\beta \preceq \gamma$

Sea  $X$  un espacio topológico. Una *red en  $X$*  es una función  $f : (\Lambda, \preceq) \rightarrow X$  donde  $(\Lambda, \preceq)$  es un conjunto dirigido. Si  $\alpha \in \Lambda$  notaremos  $f(\alpha) = x_\alpha$  y a la red  $f : (\Lambda, \preceq) \rightarrow X$  como  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ . Se dice que una red  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  *converge a  $x$*  si para todo  $U$  abierto tal que  $x \in U$  existe  $\alpha \in \Lambda$  tal que  $x_\beta \in U$  si  $\alpha \preceq \beta$ . Si  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x$ , escribimos  $x_\alpha \rightarrow x$ .

1. Demostrar que si  $X$  es Hausdorff, entonces toda red converge a lo sumo a un punto.
2. Sea  $A \subseteq X$ . Probar que  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$  existe una red  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A$  tal que  $x_\alpha \rightarrow x$ .
3. Sea  $f : X \rightarrow Y$ . Probar que  $f$  es continua en  $x \Leftrightarrow$  para toda red  $x_\alpha \rightarrow x$ ,  $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$

Dada  $f : (\Lambda, \preceq) \rightarrow X$  una red, y  $g : (\Gamma, \preceq) \rightarrow (\Lambda, \preceq)$  una función, decimos que  $f \circ g : (\Gamma, \preceq) \rightarrow X$  es una *subred de  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$*  si  $g$  verifica  $\forall \alpha \in \Lambda, \exists \gamma_0 \in \Gamma$  tal que  $g(\gamma) \geq \alpha \quad \forall \gamma \geq \gamma_0$ . A la subred la notaremos  $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ .

4. Probar que si  $x_\alpha \rightarrow x$ , entonces toda subred  $x_{\alpha_\gamma} \rightarrow x$ .
5. Probar que si  $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}}$ , entonces existe una subred de  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  que converge a  $x$  (para la ida, considerar  $\Gamma$  el conjunto de pares  $(\alpha, U)$  con  $\alpha \in \Lambda$ ,  $U$  entorno abierto de  $x$  que contiene a  $x_\alpha$ , con el orden  $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$  si  $\alpha \preceq \beta$  y  $V \subseteq U$ ).

### Grupos Topológicos

Un grupo topológico es un espacio topológico  $G$ , que además es un grupo, y tal que las funciones de multiplicación,  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto g \cdot h$  y de inversión  $()^{-1} : G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  son continuas.

6. Probar que los siguientes espacios son grupos topológicos con las operaciones indicadas
  - a)  $(\mathbb{R}, +)$ .
  - b)  $(S^1, \cdot)$  ( $\cdot$  el producto en  $\mathbb{C}$ ).
  - c)  $GL(n, \mathbb{R}), \cdot$  considerando a  $GL(n, \mathbb{R})$  con la topología métrica.
  - d) Los subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R})$  de matrices de determinante 1, y  $O(n, \mathbb{R})$  de matrices ortogonales.
7. Probar que  $G$  es un grupo topológico si y sólo si la función  $H : G \times G \rightarrow G$ ,  $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$  es continua.
8. Probar que para cada  $a \in G$ , las funciones  $L_a : G \rightarrow G$  y  $R_a : G \rightarrow G$ , definidas por  $L_a(g) = a \cdot g$ ,  $R_a(g) = g \cdot a$  son homeomorfismos.

9. Sea  $G$  un grupo topológico, y  $\mathcal{F}_e$  el filtro de entornos de la identidad del grupo.
- Probar que  $A \subseteq G$  es abierto si y sólo si  $g^{-1} \cdot A \in \mathcal{F}_e$  para todo  $g \in A$ . Además, la clausura de  $A$  es  $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_e} U \cdot A = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_e} A \cdot U$ .
  - $\mathcal{F}_e$  tiene las siguientes propiedades:
    - Si  $U \in \mathcal{F}_e$ , existe  $V \in \mathcal{F}_e$  tal que  $V \cdot V^{-1} \subseteq U$ ,
    - Si  $U \in \mathcal{F}_e$ , y  $g \in G$ ,  $g \cdot U \cdot g^{-1} \in \mathcal{F}_e$ .
  - Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $G$  que verifican
    - $e \in U$  para todo  $U \in \mathcal{F}$ ,
    - si  $U, V \in \mathcal{F}$ , entonces  $U \cap V \in \mathcal{F}$ ,
    - si  $U \in \mathcal{F}$  y  $U \subseteq V$ ,
 y las propiedades i) y ii) de la parte b), entonces existe una única topología en  $G$  tal que  $G$  es un grupo topológico y tal que  $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}$ .
10. Probar que si un grupo topológico  $G$  es  $T_0$ , entonces es  $T_3$ .
11. Sean  $A, B$  subconjuntos de una grupo topológico  $G$ . Verificar que
- $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{A} \cdot \overline{B}$ .
  - $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$ .
  - $g \cdot \overline{A} \cdot h^{-1} = \overline{(g \cdot A \cdot h^{-1})}$  para todo  $g, h \in G$ .
12. Probar que si  $H$  es un subgrupo de un grupo topológico  $G$ , entonces la clausura de  $H$  es también un subgrupo. Es más, si  $H$  es invariante, su clausura también.
13. Demostrar:
- Un subgrupo  $H$  de un grupo topológico  $G$  es abierto si y sólo si su interior es no vacío.
  - Si  $H$  es un subgrupo abierto, es cerrado.
- Un espacio topológico  $X$  se dice un *espacio homogéneo* si para todo par de puntos  $x, y \in X$ , existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(x) = y$ .
14. Verificar que un grupo topológico es un espacio homogéneo.
15. Sea  $G$  un grupo topológico, y  $H \subseteq G$  un subgrupo. Sea  $G/H$  el espacio de clases a izquierda con la topología cociente. Probar:
- La proyección  $p : G \rightarrow G/H$  es abierta.
  - $H$  es cerrado si y sólo si  $G/H$  es  $T_1$ .
  - $G$  actúa transitivamente en  $G/H$ , por lo tanto,  $G/H$  es un espacio homogéneo.
  - Si  $H$  es invariante, entonces  $G/H$  es un grupo topológico y  $p : G \rightarrow G/H$  es un morfismo de grupos continuo. Además, si  $H$  es cerrado,  $G/H$  es Hausdorff.
16. Sean  $X$  un espacio topológico Hausdorff y  $G$  un grupo que actúa transitivamente en  $X$ . Sea  $x \in X$  y sea  $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$  el grupo de isotropía de  $x$ . Probar:
- $G_x$  es un subgrupo cerrado.
  - Existe una aplicación continua y biyectiva de  $G/G_x$  en  $X$ .
  - Si  $G$  es compacto,  $X$  es un espacio homogéneo.
17. Probar que la esfera  $S^n$  es un espacio homogéneo. (Considerar la acción de  $O(n+1)$  en  $S^n$  por multiplicación.)