

Topología - Práctica II

Funciones Continuas

- Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua (en $x \in X$ o globalmente, según corresponda).
 - Para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.
 - Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
 - Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
 - Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.
- Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son inmersiones (i.e. definen un homeomorfismo con su imagen).
- Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.
 - Probar que el conjunto $\{x : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .
 - Sea $h : X \rightarrow Y$ la función

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$
 Probar que h es continua.
- Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada α .
 - Probar que si la colección $\{A_\alpha\}$ es finita y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
 - Encontrar un ejemplo donde la colección $\{A_\alpha\}$ es numerable, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
 - Una familia $\{A_\alpha\}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.
- Sean $A \subseteq X$, Y Hausdorff y $f : A \rightarrow Y$ continua. Mostrar que si f se puede extender a una función continua $g : \overline{A} \rightarrow Y$, entonces g está unívocamente determinada por f .
- Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Se dice que f es un homeomorfismo local si se verifica alguna de las siguientes propiedades equivalentes:
 - Para cada $x \in X$, existen $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $f(x) \in V$ y $f|_U : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo.
 - Primero: para cada $U \subseteq X$ abierto y $\forall x \in U$, existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in V$ y $V \subseteq f(U)$. Y segundo: para cada $x \in X$ existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $f|_U$ es inyectiva.

- c) Primero: f es abierta. Y segundo: si $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ y $\Delta_f : X \rightarrow A$ es la función definida por $\Delta_f(x) = (x, x)$, vale que Δ_f es abierta. (El espacio A tiene la topología que hereda como subespacio de $X \times X$.)

Probar efectivamente las tres propiedades son equivalentes.

7. Probar que las siguientes funciones son homomorfismos locales:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
 b) $f : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$, $f(z) = z^r$, donde $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ y $r \in \mathbb{N}$.

Topología Producto vs. Topología Caja

8. Sea $\{X_\alpha\}_\alpha$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada α un subconjunto $A_\alpha \subseteq X_\alpha$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_\alpha X_\alpha$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
- a) Si cada A_α es cerrado en X_α entonces $\prod_\alpha A_\alpha$ es cerrado en X .
 b) $\overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$.
9. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x si y sólo si la sucesión $\pi_\alpha(x_n)$ converge a $\pi_\alpha(x)$ en X_α para todo $\alpha \in A$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?
10. Sea \mathbb{R}^∞ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ que consiste de las sucesiones que son eventualmente cero (i.e. de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)$). Calcular la clausura de \mathbb{R}^∞ en \mathbb{R}^ω para la topología producto y para la topología caja.

Topologías dadas por una métrica

11. Sea X un conjunto, y sea d una métrica en X . Probar que la topología inducida por d es la mínima con la propiedad que la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
12. Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).
13. a) Comparar las topologías caja, producto y uniforme en \mathbb{R}^ω . La topología uniforme se define de la siguiente manera:
 Primero se define en \mathbb{R} la métrica acotada $\bar{d}(a, b) = \min\{|a-b|, 1\}$ (induce la misma topología que la usual). Luego se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$.
 b) ¿En cuál de las topologías son continuas las siguientes funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^ω ?

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

c) ¿En cuál de las topologías convergen las siguientes sucesiones?

$$\begin{array}{llll} w_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & x_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & y_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), & z_1 = (1, 1, 0, 0, \dots), \\ w_2 = (0, 2, 2, 2, \dots), & x_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), & z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), \\ w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), & x_3 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), & y_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), & z_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

14. Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de \mathbb{R}^ω .

Topologías iniciales y finales—Cocientes

Sea X un espacio topológico, $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos y para cada α una función $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$. Decimos que la familia de funciones $\{f_\alpha\}$ es inicial si la topología de X coincide con la topología inicial inducida por la familia. Similarmente definimos la noción de familia final.

15. Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la unión disjunta de los X_i como el espacio

$$X = \coprod_i X_i = \{(x, i) : x \in X_i\},$$

y le damos la topología final para la familia de aplicaciones $\lambda_i : X_i \rightarrow X$, $f(x) = (x, i)$. Probar que entonces $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si ' $U \cap X_i$ ' es abierto en X_i (donde ' $U \cap X_i$ ' = $\{x : (x, i) \in U\}$).

Mostrar que λ_i es abierta y cerrada.

16. Sea $\left\{X \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha\right\}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_α), y $f : X \rightarrow \prod X_\alpha$ la función definida por

$$f(x) = (f_\alpha(x))_\alpha.$$

Sea Z la imagen de f . Probar que $f : X \rightarrow Z$ es abierta.

17. Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\{1\}, S\}$. Observar que si X es un espacio topológico, $A \subseteq X$ es abierto \Leftrightarrow la función característica de A , $\Phi_A : X \rightarrow S$ (definida por $\Phi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$), es continua.

Probar que la familia $\{\Phi_U\}_{U \in \mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X .

18. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es final e inyectiva, entonces es inicial.

19. Si $f : X \rightarrow Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente (i.e. f es final y suryectiva).

20. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.

b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

21. Caracterizar el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim en cada uno de los siguientes casos

a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

$$b) (x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

22. Sean X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X y $p : X \rightarrow X/\sim$ la proyección al cociente.

Sea $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$. Probar que :

- a) Si X/\sim es Hausdorff, entonces R es cerrado en $X \times X$.
- b) Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es abierta y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff .
- c) Si $p \times p : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$ dada por $p \times p (x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff.

23. Sea $X = \mathbb{C} \times \{0, 1\}$ con la topología producto, $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Definimos en X dos relaciones de equivalencia:

$$(x, 0) \sim_1 (y, 1) \Leftrightarrow x = y \neq 0, \quad (x, j) \sim_1 (y, j) \Leftrightarrow x = y$$

$$(x, 0) \sim_2 (y, 1) \Leftrightarrow x \cdot y = 1, \quad (x, j) \sim_2 (y, j) \Leftrightarrow x = y$$

Se definen $X_1 = X/\sim_1$, $X_2 = X/\sim_2$ y se les da a ambos la topología cociente. Probar que:

- a) En X_1 todo punto es cerrado, pero X_1 no es Hausdorff.
- b) $X_2 \simeq S^2$.