

Topología - Práctica I

- Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X .
 - Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X ?
 - Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías \mathcal{T}_α ($\alpha \in A$), y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías \mathcal{T}_α ($\alpha \in A$).
 - Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).
- Probar que si \mathcal{B} es base de una topología en X , entonces la topología generada por \mathcal{B} es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a \mathcal{B} . Probar que vale lo mismo si \mathcal{B} es una sub-base.
- Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}, \text{ donde } K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$\mathcal{B}_7 = \{B : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.$$

- Probar que cada \mathcal{B}_i es una base para una topología en \mathbb{R} .
 - Comparar las siete topologías entre sí.
 - Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que \mathcal{B}_1 .
- Topología definida por filtro de entornos.**

Supongamos que tenemos para cada $x \in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades:

E1: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$.

E2: Dado $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \in \mathcal{F}_x$.

E3: Dados $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

E4: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{F}_x$, y $B \in \mathcal{F}_y$ para cada $y \in B$.

Probar:

- $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{F}_x \forall x \in X\} \cup \emptyset$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad E4). Esta topología se llama la topología definida por filtro de entornos de sus puntos.
- Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos \mathcal{F}_x se llaman filtros de entornos del punto x .

- c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.
- d) Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con \mathcal{T} .

5. Topologías definidas por operador de clausura.

Un operador $\overline{(\cdot)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

- C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
 C2: $A \subseteq \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X)$,
 C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X)$,
 C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$,

se llama un operador de clausura.

- a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Definición: $F \subseteq X$ se dice cerrado si y sólo si $X \setminus F \in \mathcal{T}$. O, equivalentemente, F es cerrado si y sólo si $\overline{F} = F$.

- b) Probar que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\}$$

define un operador de clausura.

- c) Probar que \overline{A} es igual a la intersección de todos los cerrados que contienen a A .
- d) Probar que $\bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.
- e) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.
- 1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - 2) $\overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$.
 - 3) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.
- f) Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X .
- $A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
 $B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
 $C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
 $D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
 $E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.
- g) Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 3.
- 1) Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.
 - 2) ¿Cuáles de esas topologías es Hausdorff?

6. Topología subespacio en $Z \subseteq X$ y topología producto en $X \times Y$.

Si (X, \mathcal{T}_X) es un espacio topológico y $Z \subseteq X$ es un subconjunto de X , se define la topología subespacio en Z como

$$\mathcal{T}_Z = \{U \cap Z : U \in \mathcal{T}_X\}.$$

(Z, \mathcal{T}_Z) se llama un subespacio de X .

Si (Y, \mathcal{T}_Y) es otro espacio topológico, se define la topología producto en el producto cartesiano $X \times Y$ como la topología que tiene como base de abiertos a los conjuntos de la forma $U \times V$ donde $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$.

- a) Probar que si Z es un subespacio de X , y A es un subconjunto de Z , entonces la topología de A como subespacio de Y coincide con la topología de A como subespacio de X .
- b) Consideremos a $Y = [-1, 1]$ como subespacio de \mathbb{R} . ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en Y ? ¿Cuáles son abiertos en \mathbb{R} ?
- $$A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\},$$
- $$B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\},$$
- $$C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\},$$
- $$D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\},$$
- $$E = \{x : 0 < |x| < 1 \wedge 1/x \notin \mathbb{N}\}.$$
- c) Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice abierta si $f(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X . Probar que $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas.
- d) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde \mathbb{R}_d es la topología discreta en \mathbb{R} . Comparar con la topología usual de \mathbb{R}^2 .
- e) Sea \mathbb{R}_l la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.
- f) Sea I el subespacio $[0, 1]$ de \mathbb{R} . Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.
- g) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
- h) Probar que el producto de espacios Hausdorff es Hausdorff, y que un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.
- i) Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

7. Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).

Consideremos el anillo de polinomios $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0 \forall p \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades

- a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.
- b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S .
- c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.
- d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
- e) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{a \in A} I_a) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.
 Observar que los items (c), (d), (e) muestran que los conjuntos algebraicos son cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n . Verificar que los conjuntos $D_f = V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.
- f) Verificar que los abiertos D_f son densos si f es no nulo.
- g) Caracterizar la topología de Zariski de k . Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.
- h) Comparar la topología de Zariski en $k \times k$ con la topología producto, considerando a cada copia de k con la topología de Zariski.