

GEOMETRÍA PROYECTIVA

Segundo Cuatrimestre — 2011

Primer Parcial

APELLIDO Y NOMBRE:

L.U.: HOJAS:

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. La curvatura de la curva plana definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = c$ en los puntos donde ésta es regular está dada por

$$\kappa = \frac{F_x^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

Solución. La ecuación $F(x, y) = c$ define una curva regular en un entorno de cada punto donde $\nabla F \neq 0$. En particular, sin pérdida de generalidad podemos suponer que esa ecuación define implícitamente una función $y(x)$ tal que $F(x, y(x)) = c$. Derivando, vemos que

$$F_x + F_y y' = 0, \quad F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0,$$

de manera que

$$y' = -F_x/F_y, \quad y'' = -(F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2)/F_y.$$

La curva en cuestión tiene parametrización $x \mapsto (x, y(x))$, así que la fórmula usual para la curvatura de una curva no necesariamente parametrizada por longitud de arco nos dice que

$$\kappa = \frac{1 \cdot y'' - y' \cdot 0}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{-(F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2)/F_y}{(1 + F_x^2/F_y^2)^{3/2}}$$

que es igual a la expresión dada en el enunciado. \square

2. (a) Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, sea $t_0 \in (a, b)$ y supongamos que $r = \|\gamma(t_0)\| > 0$. Si para todo $t \in (a, b)$ es $\|\gamma(t)\| \leq r$, entonces el valor absoluto de la curvatura de γ en t_0 es al menos $1/r$.
- (b) Usando la parte (a), muestre que si una curva cerrada está contenida en un disco de radio r , entonces el valor absoluto de la curvatura es al menos $1/r$ en algún punto.

Solución. (a) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t_0 = 0$ y que γ está parametrizada por longitud de arco. El desarrollo de Taylor de γ alrededor de 0 es

$$\gamma(t) = \gamma(0) + T(0)t + \kappa(0)N(0)t^2/2 + R(t),$$

con $R(t)/t^2 \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. Como la función $\phi : t \mapsto \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$ tiene un máximo local en 0, su derivada allí se anula, y entonces $\gamma(0)$ es ortogonal a $T(0)$ y, en consecuencia, paralelo a $N(0)$. Usando el desarrollo anterior, vemos que

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \gamma(0), \gamma(0) \rangle + \left(1 + \kappa(0)\langle \gamma(0), N(0) \rangle\right)t^2 + S$$

con $S/t^2 \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. En particular, $0 \geq \phi''(0) = 1 + \kappa(0)\langle \gamma(0), N(0) \rangle$ y entonces $-1 \geq \kappa(0)\langle \gamma(0), N(0) \rangle$. Tomando valor absoluto en esta desigualdad y usando el hecho de que $\gamma(0)$ y $N(0)$ son paralelos y el segundo vector es unitario, vemos inmediatamente que $1 \leq |\kappa(0)|\|\gamma(0)\| = r|\kappa(0)|$, lo que es equivalente a la desigualdad buscada.

(b) Supongamos que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización periódica de periodo p de la curva cerrada. La función $t \in [0, r] \mapsto \|\gamma(t)\|^2 \in \mathbb{R}$ alcanza entonces su máximo r^2 en algún punto $t_0 \in \mathbb{R}$ y es inmediato que estamos en la situación de la parte (a). \square

3. Determine las formas normales general afín real, general afín compleja y ortogonal de la cuádrica

$$2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 - z^2 + 2yz + 4x + 4y + 2z + 3 = 0.$$

4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular.

- La curva α está contenida en una esfera sii existe un punto p tal que para todo $s \in I$ el vector $\alpha(s) - p$ está en el subespacio $\langle N(s), B(s) \rangle$.
- Supongamos que la curvatura de α es siempre positiva. Existe un punto p tal que $\alpha(s) - p$ está contenido en el plano $\langle T(s), B(s) \rangle$ para todo $s \in I$ sii existen constantes $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\tau}{\kappa} = as + b.$$

Solución. (a) Si la curva está contenida en una esfera de centro p , entonces $\langle \alpha - p, \alpha - p \rangle$ es constante. Derivando, vemos que $\langle T, \alpha - p \rangle = 0$ y, como $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , vemos que existen funciones a y b tales que $\alpha - p = aN + bB$. Esto prueba la necesidad de la condición.

Recíprocamente, supongamos que hay funciones a y b y un punto p tales que $\alpha - p = aN + bB$. Notemos que $a = \langle \alpha - p, N \rangle$ es diferenciable, y lo mismo con b . Es

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle = 2\langle T, \alpha - p \rangle = 2\langle T, aN + bB \rangle = 0,$$

de manera que $\langle \alpha - p, \alpha - p \rangle$ es constante: esto nos dice, claramente, que α se mueve en una esfera centrada en p .

(b) Supongamos que existen un punto p y funciones c y d tales que

$$\alpha - p = cT + dB. \tag{1}$$

Entonces $c = \langle \alpha - p, T \rangle$ y $d = \langle \alpha - p, B \rangle$ son funciones diferenciables, y derivando (1) vemos que $T = c'T + \kappa cN + d'B + \tau dN$, de manera que $c' = 1$, $d' = 0$ y $\kappa c + \tau d = 0$. Las dos primeras ecuaciones nos dicen que $c = c_0 + s$ para algún $c_0 \in \mathbb{R}$ y que d es constante. Si fuese $d = 0$, tendríamos que $\alpha - p = (c_0 + s)T$, de manera que $T = T + (c_0 + s)\kappa N$ y, en consecuencia, $(c_0 + s)\kappa = 0$. Esto es imposible. La tercera ecuación, entonces, nos dice que

$$\kappa(c_0 + s) + \tau d = 0,$$

que, como $b \neq 0$ y $\kappa > 0$, es equivalente a la ecuación del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que existen constantes $a \neq 0$ y b tales que $\tau/\kappa = as + b$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(\alpha - (b/a + s)T - 1/aB) = T - T - (b/a + s)\kappa N + \tau/aN = ((b/a + s)\kappa + \tau/a)N = 0,$$

de manera que $p = \alpha - (b/a + s)T - 1/aB$ es constante y $\alpha - p$ está siempre en el subespacio generado por T y por B . \square