

Geometría Projectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 6

1. ¿Cuáles son los puntos de \mathbb{P}^2 que no pertenecen a dos de los tres conjuntos U_0, U_1, U_2 ?
2. Sea $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ (k infinito). Escribamos $F = \sum F_i$, donde F_i es una forma de grado i . Sea $P \in \mathbb{P}^n(k)$, y supongamos que $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ para toda elección de coordenadas homogéneas $(x_0 : \dots : x_n)$ de P . Probar que $F_i(x_0, \dots, x_n) = 0$ para todas las coordenadas homogéneas de P .
(Sugerencia: fijar (x_0, \dots, x_n) y considerar $G(\lambda) = F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \sum \lambda^i F_i(x_0, \dots, x_n)$.)
3. Sea I un ideal homogéneo de $k[X_0, \dots, X_n]$. Probar que I es primo si y sólo si se satisface la siguiente condición: para formas cualesquiera $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$, si $FG \in I$, entonces $F \in I$ o $G \in I$.
4. Si I es un ideal homogéneo, probar que $\text{Rad}(I)$ es también homogéneo.
5. Probar cada una de las componentes irreducibles de un cono es también un cono.
6. Sea I un ideal homogéneo de $k[X_0, \dots, X_n]$, $\Gamma = k[X_0, \dots, X_n]/I$. Probar que las formas de grado d de Γ constituyen un espacio vectorial de dimensión finita sobre k .
7. Sea $R = k[X, Y, Z]$, $F \in R$ una forma irreducible de grado n , $V = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, $\Gamma = \Gamma_h(V)$.
 - a) Construir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} \Gamma \rightarrow 0,$$

donde ψ es la multiplicación por F .

- b) Probar que $\dim_k \{\text{formas de grado } d \text{ de } \Gamma\} = dn - \frac{n(n-3)}{2}$ si $d > n$.
8. Un conjunto $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ se denomina *subvariedad lineal* de $\mathbb{P}^n(k)$ si $V = V(H_1, \dots, H_r)$, donde cada H_i es una forma de grado 1.
 - a) Demostrar que si T es un isomorfismo proyectivo, entonces $V^T = T^{-1}(V)$ es también una subvariedad lineal.
 - b) Probar que existe un isomorfismo proyectivo T de \mathbb{P}^n tal que $V^T = V(X_{m+1}, \dots, X_n)$, y por lo tanto que V es una variedad.
 - c) Probar que la m que aparece en el ítem anterior es independiente de la elección de T . El m se llama la dimensión de V ($m = -1$ si $V = \emptyset$).
 9. Sean H_1, \dots, H_m hiperplanos de \mathbb{P}^n , $m \leq n$. Probar que $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \neq \emptyset$.
 10. Sean $P = (a_0 : \dots : a_n), Q = (b_0 : \dots : b_n) \in \mathbb{P}^n$ dos puntos distintos. La recta que une P y Q se define por $L = \{(\lambda a_0 + \mu b_0 : \dots : \lambda a_n + \mu b_n) : \lambda, \mu \in k\}$. Probar el análogo proyectivo del problema 15 de la práctica 3.
 11. Sean P_1, P_2, P_3 (respectivamente Q_1, Q_2, Q_3) tres puntos de \mathbb{P}^2 no alineados. Probar que existe un isomorfismo proyectivo (único) $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T(P_i) = Q_i$ para $i = 1, 2, 3$.
 12. Probar que todo par de rectas distintas de \mathbb{P}^2 se cortan en un punto.
 13. Sean L_1, L_2, L_3 (respectivamente M_1, M_2, M_3) rectas de \mathbb{P}^2 que no sean concurrentes. Probar que existe un isomorfismo proyectivo (único) $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T(L_i) = M_i$.
(Sugerencia: considerar $P_i = L_j \cap L_k$, $Q_i = M_j \cap M_k$, i, j, k distintos y aplicar el problema anterior.)
 14. Sea $H = V(\sum a_i X_i)$ un hiperplano de \mathbb{P}^n . Observar que (a_0, \dots, a_n) está determinado por H salvo una constante.
 - a) Probar que asignando $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ a H se obtiene una biyección entre $\{\text{hiperplanos de } \mathbb{P}^n\}$ y \mathbb{P}^n .
Si $P \in \mathbb{P}^n$, sea \mathbb{P}^* el hiperplano correspondiente, y si H es un hiperplano, H^* designa el punto correspondiente.
 - b) Probar que $(P^*)^* = P$, $(H^*)^* = H$. Probar que $P \in H$ si y sólo si $H^* \in \mathbb{P}^*$.

15. Un conjunto $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ se llama *cuádrica* si $C = V(F)$ con $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ una forma de grado 2.
 Sea $C = V(F) \subset \mathbb{P}^n(k)$ una cuádrica.
- a) Supongamos que $2 \neq 0$ en k . Probar que existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G)$ con G de la forma $G = \sum_{i=0}^n a_i X_i^2$, $a_i \in k$.
 (Sugerencia: completar cuadrados.)

- b) Deducir que si $k = \mathbb{R}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G_{r,p})$, con $G_{r,p}$ de la forma

$$G_{r,p} = \sum_{i=0}^p X_i^2 - \sum_{i=p+1}^r X_i^2, \quad 0 \leq p \leq r \leq n, \quad r \leq 2p+1.$$

Probar además que el par (r, p) no depende de la elección de T .

- c) Concluir que si $k = \mathbb{C}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G_r)$, con G_r de la forma

$$G_r = \sum_{i=0}^r X_i^2, \quad 0 \leq r \leq n,$$

donde r no depende de la elección de T .

16. Si $I = (F)$ es el ideal de una hipersuperficie afín, probar que $I^* = (F^*)$.
17. Sea $V = V(Y - X^2, Z - X^3) \subset A^3$. Recordar que $I(V) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Probar que $ZW - XY \in I(V)^* \subset k[X, Y, Z, W]$, pero $ZW - XY \notin ((Y - X^2)^*, (Z - X^3)^*)$. Por lo tanto en general no vale que si $I(V) = (F_1, \dots, F_r)$ entonces $I(V)^* \neq (F_1^*, \dots, F_r^*)$.
18. Probar que si $V \subset W \subset \mathbb{P}^n$ son variedades, y V es una hipersuperficie, entonces $W = V$ o $W = \mathbb{P}^n$ (ver problema 18 de la práctica 2).
19. Sea V una variedad de \mathbb{P}^n tal que $V \supset H_\infty$. Probar que $V = \mathbb{P}^n$ o $V = H_\infty$. Si $V = \mathbb{P}^n$, entonces $V_* = A^n$, mientras que si $V = H_\infty$, entonces $V_* = \emptyset$.
20. Sea $P = (0 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2(k)$. Probar que las rectas que pasan por P son las siguientes:
- a) Las rectas "verticales" $L_\lambda = V(X - \lambda Z) = \{(\lambda : t : 1) : t \in k\} \cup \{P\}$.
- b) La recta del infinito $L_\infty = V(Z) = \{(x : y : 0) : x, y \in k\}$.
21. Sea $P(x : y : z) \in \mathbb{P}^2$.
- a) Probar que $\{(a, b, c) \in A^3 : ax + by + cz = 0\}$ es un hiperplano de A^3 .
- b) Probar que para todo conjunto finito de puntos de P^2 existe una recta que no pasa por ninguno de ellos.