

Geometría Proyectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 4

1. Sean las siguientes curvas planas:

a) $Y^2 - X^3$	c) $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
b) $Y^2 - X^3 - X^2$	d) $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

Probar que $P(0,0)$ es el único punto múltiple de ellas.

2. Buscar los puntos múltiples, y las rectas tangentes en los puntos múltiples, de cada una de las siguientes curvas

a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$	c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$
b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$	d) $Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

Dibujar la parte de curva del item d) que está contenida en $A^2(\mathbb{R})$.

3. Si una curva de grado n tiene un punto P de multiplicidad n , probar que F consta de n rectas que pasan por P (no necesariamente distintas).
4. Sea P un punto doble de una curva F . Probar que P es un nodo si y sólo si $F_{XX}(P)^2 \neq F_{XX}(P)F_{YY}(P)$.
5. (Se supone que la característica de k es cero.) Probar que $m_P(F)$ es el menor entero m tal que para ciertos $i + j = m$, $\frac{\partial^m F}{\partial X^i \partial Y^j}(P) \neq 0$.
6. a) Sean $F, G \in k[X_1, \dots, X_n]$ formas de grados $r, r + 1$ respectivamente, sin factores comunes. Probar que $F + G$ es irreducible.
b) Se pueden construir curvas irreducibles con rectas tangentes dadas de antemano L_i de multiplicidad r_i , de la siguiente manera: si $\sum r_i = m$, sea $F = \prod L_i^{r_i} + F_{m+1}$, donde F_{m+1} se elige de manera que F sea irreducible.
7. a) Probar que la parte real de la curva c) del ejercicio 1. está formada por el conjunto de puntos de $A^2(\mathbb{R})$ cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen la ecuación $r = -\sin(3\theta)$. Buscar las ecuaciones polares de la parte real de la curva d) del mismo ejercicio.
b) Si n es un entero impar positivo, probar que la ecuación $r = \sin(n\theta)$ define la parte real de una curva de grado $n + 1$ con un punto ordinario de orden n en $(0,0)$.
(Usar el siguiente resultado: $\sin(n\theta) = \text{parte imaginaria de } e^{in\theta}$, para construir la ecuación; nótese que un giro de π/n es una transformación lineal que aplica la curva en si misma.)
c) Analizar las singularidades que surgen al considerar $r^2 = \sin^2(n\theta)$, con n par.
d) Probar que las curvas construidas en b) y c) son ambas irreducibles en $A^2(\mathbb{C})$.
(Sugerencia: homogeneizar los polinomios, probar que estos son irreducibles y deducir la irreducibilidad de los originales.)
8. Sea $T : A^2 \rightarrow A^2$ una aplicación polinómica, $T(Q) = P$.
a) Probar que $m_Q(F^T) = m_P(F)$.
b) Sea $T = (T_1, T_2)$ y definamos $J_Q T = (T_{iX_j}(Q))$ como la matriz jacobiana de T en Q . Probar que $m_Q(F^T) = m_P(F)$ si $J_Q T$ es inversible.
c) Probar que el recíproco de b) es falso: sea $T = (X^2, Y)$, $F = Y - X^2$, $P = Q = (0,0)$.
9. Sea $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ y $V(F) \subset A^n$ la hipersuperficie que define. Sea $P \in A^n$.
a) Definir la multiplicidad $m_P(F)$ de F en P .
b) Si $m_P(F) = 1$, definir el hiperplano tangente a F en P .
c) Examinar $F = X^2 + Y^2 - Z^2$, $P = (0,0)$. ¿Es posible definir los hiperplanos tangentes en los puntos múltiples?

10. Probar que una curva plana irreducible posee solamente un número finito de puntos múltiples. ¿Es esto cierto para hipersuperficies en A^n , $n \geq 3$?
11. Sea $V \subset A^n$ una variedad afín, $P \in V$. El espacio tangente $T_P(V)$ se define por

$$T_P(V) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n : \text{para todo } G \in I(V), \sum_{i=1}^n G_{X_i}(P)a_i = 0 \right\}.$$

- a) Si $V = V(F)$ es una hipersuperficie y F es irreducible, probar que $T_P(V) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \sum F_{X_i}(P)a_i = 0\}$.
- b) Con las mismas hipótesis que en a), ¿cómo se relaciona la dimensión de $T_P(V)$ con la multiplicidad de F en P ?
12. Sea A un anillo, y $F, G \in A[X]$. Probar que existen $P, Q \in A[X]$ tales que la resultante $R(F, G)$ se escribe $R(F, G) = PF + QG$.
13. Sea k un cuerpo con $k = \bar{k}$ y sea $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ irreducible. Probar (sin usar el Teorema de los ceros de Hilbert) que si $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ y $V(F) \subset V(G)$ entonces F/G .
(Sugerencia: Usar la resultante.)
14. Sean $F, G \in k[X]$ mónicos, con k un cuerpo algebraicamente cerrado, de manera que

$$F = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \quad G = \prod_{j=1}^m (X - \beta_j).$$

Probar que

$$R(F, G) = \lambda \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j), \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in k.$$

15. Sean $F, G \in A[X]$, y sea $\varphi : A[X]/(G) \rightarrow A[X]/(G)$, definido por $\varphi(\overline{H}) = \overline{FH}$. Probar que $\det(\varphi) = R(F, G)$.
16. Calcular las direcciones asintóticas y asíntotas (si existen) de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:
- | | |
|----------------------|--|
| a) $X^2 - Y^2 - 1$ | e) $Y^2 - X^3 + X$ |
| b) $X^2 + Y^2 - 1$ | f) $X^n + Y^n - 1$ |
| c) $Y - X^2$ | g) $X^n - Y^m$ |
| d) $Y^2 - X^2 + X^3$ | h) $Y^2 - G(X)$, donde $G \in k[X]$ tiene grado n |
17. Sea $F \in k[X, Y]$ de grado n . Denotemos $N \leq n$ el grado de F con respecto a la variable Y , de modo que $F = \sum_{i=0}^N a_i(X)Y^i$ con $a_i \in k[X]$ y $a_N \neq 0$. Determinar cuáles son las implicaciones verdaderas entre las siguientes proposiciones:
- $N < n$
 - $F_n(0, 1) = 0$ (o sea, la dirección $(u, v) = (0, 1)$ (dirección vertical) es asintótica para F)
 - F no contiene el monomio Y^n
 - F tiene una recta asintótica vertical
 - a_N no es constante.
18. Sea $F \in k[X, Y]$ de grado n . Demostrar que existe una matriz inversible $A \in k^{2 \times 2}$ tal que $G(X, Y) = F((X, Y) \cdot A)$ contiene el monomio Y^n . Demostrar que entonces el anillo de coordenadas de $V(G)$ es una extensión entera de $k[X]$.
19. Sea k el cuerpo de los reales o de los complejos. Proponer una definición métrica de dirección asintótica y de asíntota (o sea, en términos de distancia entre puntos de la curva y de la recta). Demostrar la equivalencia con la definición dada en clase.