

Geometría Projectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 3

Nota: En esta práctica k denota a un cuerpo algebraicamente cerrado. Usaremos además el nombre *variedad afín* o *variedad* para denotar a un conjunto algebraico irreducible.

1. Sea $V \subset A^n$ un conjunto algebraico. Probar que la aplicación que a cada $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ le hace corresponder una función polinómica de $A(V, k)$ es un homomorfismo de anillos cuyo núcleo es $I(V)$.
2. Sea $V \subset A^n$ una variedad. Una *subvariedad* de V es una variedad $W \subset A^n$ que está contenida en V . Probar que existe una correspondencia uno a uno entre los subconjuntos algebraicos (sean subvariedades o puntos) de V y los ideales radicales (respectivamente ideales primos o ideales maximales) de $\Gamma(V)$ (ver problemas 1 y 17 de la práctica 2).
3. Sea W una subvariedad de una variedad V , y sea $I_V(W)$ el ideal de $\Gamma(V)$ correspondiente a W .
 - a) Probar que cada función polinómica sobre V se restringe a una función polinómica sobre W .
 - b) Probar que la aplicación de $\Gamma(V)$ en $\Gamma(W)$ definida en el ítem anterior es un homomorfismo de núcleo $I_V(W)$, por lo tanto, $\Gamma(W)$ es isomorfo a $\Gamma(V)/I_V(W)$.
4. Sea $V \subset A^n$ una variedad. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes: (i) V es un punto; (ii) $\Gamma(V) = k$; (iii) $\dim_k \Gamma(V) < \infty$.
5. Sea F un polinomio irreducible de $k[X, Y]$, y supongamos que F es mónico en Y : $F = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X)$. Sea $V = V(F) \subset A^2$. Probar que el homomorfismo natural de $k[X]$ en $\Gamma(V) = k[X, Y]/(F)$ es uno a uno, por lo que $k[X]$ puede considerarse como un subanillo de $\Gamma(V)$; probar que las clases residuales $\overline{1}, \overline{Y}, \dots, \overline{Y}^{n-1}$ generan $\Gamma(V)$ sobre $k[X]$ como un módulo. Es más, probar que son linealmente independientes, por lo que se tiene un módulo libre.
6. *Definición:* Sea $\varphi : V \rightarrow W$ una función polinómica entre conjuntos algebraicos. Definimos $\tilde{\varphi} : A(W, k) \rightarrow A(V, k)$ como $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$. Como $\tilde{\varphi}(\Gamma(W)) \subset \Gamma(V)$, también vamos a notar con $\tilde{\varphi}$ a la restricción $\tilde{\varphi}|_{\Gamma(W)} : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$.
Sean $\varphi : V \rightarrow W$, $\psi : W \rightarrow Z$. Probar que $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$. Probar que la composición de aplicaciones polinómicas es una aplicación polinómica.
7. Si $\varphi : V \rightarrow W$ es una aplicación polinómica, y X es un subconjunto algebraico de W , probar que $\varphi^{-1}(X)$ es un conjunto algebraico de V . Si $\varphi^{-1}(X)$ es irreducible, probar que X es irreducible. Esto nos proporciona un método útil para determinar la irreducibilidad de los conjuntos algebraicos.
8.
 - a) Probar que $\{(t, t^2, t^3) \in A^3(k) : t \in k\}$ es una variedad afín.
 - b) Probar que $V(XZ - Y^2, YZ - X^3, Z^2 - X^2Y) \subset A^3(\mathbb{C})$ es una variedad.
(Sugerencia: $Y^3 - X^4, Z^3 - X^5, Z^4 - Y^5 \in I(V)$. Buscar una aplicación polinómica de $A^1(\mathbb{C})$ sobre V .)
9. Sea $\varphi : V \rightarrow W$ una aplicación polinómica entre variedades afines, $V' \subset V$, $W' \subset W$ subvariedades. Supongamos que $\varphi(V') \subset W'$.
 - a) Probar que $\tilde{\varphi}(I_W(W')) \subset I_V(V')$ (ver el problema 3).
 - b) Probar que la restricción de φ es una aplicación polinómica de V' en W' .
10. Probar que la *proyección canónica* $p : A^n \rightarrow A^r$, $n \geq r$ definida por $p(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_r)$ es una aplicación polinómica.
11. Sea $f \in \Gamma(V)$, $V \subset A^n$ una variedad. Definimos el *grafo* de f por $G(f) = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A^{n+1} : (a_1, \dots, a_n) \in V, a_{n+1} = f(a_1, \dots, a_n)\}$. Probar que $G(f)$ es una variedad afín, y que la aplicación $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n))$ define un isomorfismo entre V y $G(f)$. (La proyección es la inversa.)
12.
 - a) Sea $\varphi : A^1 \rightarrow V = V(Y^2 - X^3) \subset A^2$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Probar que, a pesar de ser φ una aplicación polinómica inyectiva y suryectiva, φ no es un isomorfismo.
(Sugerencia: $\tilde{\varphi}(\Gamma(V)) = k[T^2, T^3] \subset k[T] = \Gamma(A^1)$.)

- b) Sea $\varphi : A^1 \rightarrow V = V(Y^2 - X^2(X+1))$ definida por $\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Probar que φ es inyectiva y suryectiva, excepto $\varphi(\pm 1) = (0, 0)$.
13. Sea $V = V(X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subset A^3$ como en el problema 19 de la práctica 2, $\overline{\alpha} : \Gamma(V) \rightarrow k[T]$ inducido por el homomorfismo α de aquel problema.
- a) ¿Cuál es la aplicación polinómica $f : A^1 \rightarrow V$ tal que $\tilde{f} = \overline{\alpha}$?
- b) Probar que f es inyectiva y suryectiva, pero no es isomorfismo.
14. Un conjunto $V \subset A^n(k)$ se denomina *subvariedad lineal* de $A^n(k)$ si $V = V(F_1, \dots, F_r)$ para ciertos polinomios F_i de grado 1.
- a) Probar que si T es un cambio de coordenadas afín en $A^n(k)$, entonces V^T es una subvariedad lineal de $A^n(k)$.
- b) Si $V \neq \emptyset$, probar que existe un cambio de coordenadas afín T en $A^n(k)$ tal que $V^T = V(X_{m+1}, \dots, X_n)$. (Sugerencia: usar inducción en r .) Luego V es una variedad.
- c) Probar que el m que aparece en el item anterior es independiente de la elección de T . Se denomina la dimensión de V . V es entonces isomorfa (como variedad) a $A^m(k)$. (Sugerencia: suponer que existe un cambio de coordenadas afín T tal que $V(X_{m+1}, \dots, X_n)^T = V(X_{s+1}, \dots, X_n)$, $m < s$; probar que entonces T_{m+1}, \dots, T_n serían dependientes.)
15. Sean $P = (a_1, \dots, a_n)$ y $Q = (b_1, \dots, b_n)$ dos puntos distintos de $A^n(k)$. La *recta* determinada por P y Q se define por $\{a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n) : t \in k\}$.
- a) Probar que si L es la recta determinada por P y Q , y T es un cambio de coordenadas afín, entonces $T(L)$ es la recta determinada por $T(P)$ y $T(Q)$.
- b) Probar que una recta es una subvariedad lineal de dimensión 1, y que una subvariedad lineal de dimensión 1 es la recta determinada por dos cualesquiera de sus puntos.
- c) Probar que, en $A^2(k)$, la recta es un hiperplano.
- d) Sean $P, P' \in A^2(k)$ y L_1, L_2 dos rectas distintas que pasan por P , L'_1, L'_2 dos rectas distintas que pasan por P' . Probar que existe un cambio de coordenadas afín T de $A^2(k)$ tal que $T(P) = P'$ y $T(L_i) = L'_i$, $i = 1, 2$.
16. Sea $k = \mathbb{C}$. Consideremos en $A^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ la métrica usual (obtenida identificando a \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , y por lo tanto a \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n}). Recordar que un espacio métrico X es arco-conexo si para todo par de puntos $P, Q \in X$, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$.
- a) Probar que $\mathbb{C} \setminus S$ es arco-conexo para todo conjunto finito S .
- b) Sea V un conjunto algebraico de $A^n(\mathbb{C})$. Probar que $A^n(\mathbb{C}) \setminus V$ es arco-conexo. (Sugerencia: si $P, Q \in A^n(\mathbb{C}) \setminus V$, sea L la recta que une P y Q . $L \cap V$ es finito y L es isomorfo a $A^1(\mathbb{C})$.)