

Geometría Projectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

PRIMER PARCIAL

1. Sean $V \subset A^n$ una variedad y $\varphi : V \rightarrow A^m$ una aplicación polinómica. Sea $G(\varphi) \subset A^{n+m}$ el grafo de φ , esto es,

$$G(\varphi) = \{(v, w) = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \in A^{n+m} : v \in V, \varphi(v) = w\}.$$

- a) Probar que $G(\varphi)$ es una variedad.
- b) Si $I(V) = (F_1, \dots, F_r)$, exhibir un conjunto finito de generadores de $I(G(\varphi))$.
- c) Mostrar un ejemplo de una variedad $V \subset A^n$ y de una función $\varphi : V \rightarrow A^m$ que no sea polinómica pero tal que $G(\varphi)$ sí sea una variedad.
(Sugerencia: Considerar una φ biyectiva con vuelta polinómica.)
2. a) Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ una matriz. Recordar que el rango de A es el mayor valor k tal que existe un menor de A de tamaño $k \times k$ distinto de cero.
Probar que $X_{\leq k} = \{A \in \mathbb{C}^{m \times n} : \text{rg}(A) \leq k\}$ es un conjunto algebraico.
- b) Recordar que una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tiene rango menor o igual a 1 si y sólo si existen $u \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, $v \in \mathbb{C}^{1 \times n}$ tales que $uv = A$.
Probar que $X_{\leq 1}$ es irreducible.
- c) Supongamos que $m = n$. Probar que $F = \det \in \mathbb{C}[X_{ij}]$ es un polinomio irreducible.
Deducir que $X_{\leq n-1}$ es una hipersuperficie irreducible y que $I(X_{\leq n-1}) = (F)$.
3. Sea $F = X^2 - Y^2 - 1$, $C = V(F) \subset \mathbb{R}^2$ la cónica que define y $P = (a, b) \notin C$.
- a) Probar que si $a^2 - b^2 > 1$, no hay rectas tangentes a C que pasan por P .
- b) Hallar los P tales que $a^2 - b^2 < 1$ y por los cuales no pasan rectas tangentes a C .
- c) Sea ahora $C' = V(F) \subset \mathbb{C}^2$. ¿Qué se puede decir en este caso?
4. Sea $F = X^3 + Y^3 + 1 - \alpha(X + Y + 1)^3$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.
- a) Encontrar los valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ para los cuales F tiene puntos singulares. Para cada valor α hallado exhibir las rectas tangentes en los puntos singulares y las ecuaciones de las asíntotas.
- b) Entre los valores hallados en el ítem anterior encontrar aquellos para los cuales F se factoriza como producto de polinomios lineales. ¿Cuáles deberían ser los factores?
Dibujar en \mathbb{R} .
5. Sea $T : A^2 \rightarrow A^2$ una aplicación polinómica, $T(Q) = P$ y tal que $J_Q T = (T_{iX_j}(Q))$ es inversible (y por lo tanto $m_P(F) = m_Q(F^T)$, ver ejercicio 8) b) de la práctica 4).

Supongamos además que $m_P(F) \geq 1$. Mostrar cómo calcular las ecuaciones de las rectas tangentes de F^T en Q a partir de $J_Q T$ y de las ecuaciones de las rectas tangentes de F en P .

(Sugerencia: hacer primero el caso $m_P(F) = 1$.)