

# Geometría Proyectiva

## Práctica XI - Adición en cúbicas y sistemas lineales de curvas 1998 - Primer Cuatrimestre

1. Si una cúbica  $C$  no singular en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  está dada por  $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$ , probar que hay una estructura de grupo tal que:

- (a)  $O = [0 : 1 : 0]$  es el elemento neutro de dicha estructura.
- (b) El inverso está dado (sobre la afinización  $z = 1$ ) por  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .
- (c)  $\forall P, Q, R \in C$  se tiene que  $P + Q + R = O \iff P, Q$  y  $R$  son colineales.

Notar que la curva se descompone como  $O \cup (C \cap (z = 1))$ .

2. Sea  $C$  la curva  $y^2 = x^3 + 4x$  con la operación de grupo del ejercicio 1. Si  $P = (2, 4)$ , ver que  $T_P C$  pasa por el origen. Concluir que  $P$  es un punto de orden 4.
3. Sea  $C$  la curva  $y^2 = x^3 + ax + b$  una cúbica real no singular con la operación de grupo del ejercicio 1. Caracterizar los puntos de orden 2 de  $C$ . Describir geoméricamente los puntos de orden 4.
4. Sea  $C$  la curva  $y^2 = x^3 + ax + b$  con la operación de grupo del ejercicio 1. Si  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$  están en  $C$ , mostrar que se pueden dar coordenadas a  $P_1 + P_2$  por medio de funciones racionales de  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .
5. Considere la curva afín  $C \equiv (z = x^3)$ .  $C$  es la imagen de la aplicación biyectiva  $\phi: k \rightarrow C$  dada por  $\phi(t) = (t, t^3)$ . Por lo tanto la estructura aditiva de  $k$  induce una estructura de grupo en  $C$  de modo que  $(0, 0)$  es el elemento neutro y que  $P + Q + R = O \iff P, Q$  y  $R$  son colineales, para cualesquiera  $P, Q, R \in C$ . Por otro lado se tiene la estructura de grupo dada por ser la parte no singular de una cúbica. Ver que ambas estructuras coinciden.
6. Considere la cúbica

$$\mathcal{C} \equiv (y^2z = x^3 + xz^2)$$

en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}_7)$ .

- (a) Verificar que  $\mathcal{C}$  es una curva no singular (utilizar la definición formal de derivación de polinomios).

- (b) En vista de lo anterior se sabe que  $\mathcal{C}$  posee una única estructura de grupo que tiene por elemento neutro a  $P = [0 : 1 : 0]$ . Identificar este grupo mediante el teorema de clasificación de grupos abelianos. *Sugerencia: trabajar con la carta afín dada por el plano de infinito ( $z = 0$ ).*
- (c) Si  $\mathcal{C}'$  es otra cúbica cuya estructura de grupo es isomorfa a la de  $\mathcal{C}$ , hallar la cantidad de puntos de inflexión de  $\mathcal{C}'$ . (*sugerencia: estudiar la relación entre el orden de un punto en el grupo y ser punto de inflexión*).
7. Supongamos que dos curvas de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de orden  $n$  se intersectan en  $n^2$  puntos y exactamente  $mn$  de ellos yacen en una curva irreducible de orden  $m$ . Demostrar que existe una curva irreducible de orden  $n - m$  que contiene a los restantes  $n(n - m)$ .
8. Sea  $\mathcal{C} \equiv (F = 0)$  una cúbica irreducible en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , y  $\mathcal{L}$  una recta que corta a  $\mathcal{C}$  en los tres puntos  $P_1, P_2, P_3$ .  
Si  $L_i$  es la tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P_i$ , entonces por el Teorema de Bezout,  $L_i$  corta a la cúbica en  $P_i$  con multiplicidad dos, y en un tercer punto  $Q_i$ .  
Probar que  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  están alineados.  
*Sugerencia: considerar la cúbica  $G = L_1.L_2.L_3$ , la cuádrica  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}.\mathcal{L}$ , y la familia lineal  $\{\lambda F + \mu G : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ .*

9. (Teorema de Pascal) Considere el hexágono de la figura como subconjunto de  $\mathbb{C}$ :

La recta  $L_i$  une al punto  $P_i$  con  $P_{i+1}$ , y la recta  $L_6$  une  $P_6$  con  $P_1$

- (a) Supongamos que los puntos  $\{P_1, \dots, P_6\}$  (los vértices del hexágono) se hallan sobre una cuádrica irreducible. Probar que  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  (las intersecciones de los lados opuestos del hexágono) están alineados.
- (b) Probar que si las intersecciones de los lados opuestos del hexágono están alineadas, entonces existe una cuádrica irreducible que contiene a los vértices del hexágono.

Suponer en todos los casos que el hexágono es no degenerado, es decir que no hay 3 vértices alineados.

(*sugerencia:* considere las curvas  $G = L_1.L_3.L_5$ ,  $H = L_2.L_4.L_6$  y la familia lineal  $\{\lambda G + \mu H : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ ).