

Geometría Proyectiva

Práctica X - Teorema de Bezout

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Demostrar el teorema de Bezout en el caso en que una de las curvas es una recta.
2. Sea $f(x, y) = y - g(x)$ con g un polinomio complejo de grado n , y sea $X = (f = 0) \subset \mathbb{C}^2$ la curva afín definida por f . Si $H_a = (y - a = 0)$ es una recta horizontal, probar que el número total de intersecciones (contadas con multiplicidad) $X \cap H_a$ es igual a n . Si $V_a = (x - a = 0)$ es una recta vertical, el número total de intersecciones $X \cap V_a$ es igual a 1. Cómo se concilia esto con el teorema de Bezout ?
3. Si \mathcal{C} es una cuádrica no degenerada en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y $\mathcal{S} \equiv (G = 0)$, con G un polinomio homogéneo de grado d , entonces la cantidad de puntos de intersección entre ambas curvas es menor o igual que $2d$.
4. Sean C_1 y C_2 dos curvas en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definidas por los ceros de $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ y $G \in \mathbb{C}[x, y, z]_k$.
Demostrar que si $[x_0, y_0, z_0] \in C_1 \cap C_2$, entonces $[x_0, y_0, z_0]$ es un punto singular de la curva definida por los ceros de FG .
Concluir que si una curva de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es reducible, entonces es singular.
5. Sea $\mathcal{C} \equiv (F = 0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Un punto $P \in \mathcal{C}$ se llama *hipercúspide* si P es un punto (singular) de orden $d \geq 2$, \mathcal{C} posee **una sola** recta tangente \mathcal{L} en P , y el orden de contacto entre \mathcal{L} y \mathcal{C} en P es **exactamente** $d + 1$.
Probar que si P es una hipercúspide de \mathcal{C} , entonces F posee una sola componente que pase por P .
6. Sean C una cúbica irreducible en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y P_1, \dots, P_9 9 puntos de C .
Verificar que:
 - (a) No existe ninguna recta que contenga a 4 de los 9 puntos.
 - (b) No existe ninguna cónica que contenga a 7 de los 9 puntos.
7. Sea C una cúbica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con dos puntos dobles. Verificar que C contiene a la recta que los une.

8. Supongamos que $\mathcal{C} \equiv (F = 0)$ es una curva en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y que P es un punto simple de \mathcal{C} . Llamemos por simplicidad $F_i = F_{x_i}$ y $F_{ij} = F_{x_i x_j}$ y definimos

(a) $Q_P(x) = \sum_{i,j} F_{ij}(P)x_i x_j$ (es una cuádrica)

(b) $H(x) = \det(F_{ij}(x))$ (calcular el orden de H)

(c) $L_P(x) = \sum_i F_i(P)x_i$ la polar por P , (es una recta)

Probar que P es un punto de inflexión de \mathcal{C} si y sólo si L_P es una componente de Q_P . Concluir que P es un punto de inflexión de \mathcal{C} si y sólo si $H(P) = 0$.
Sugerencia: utilizar el teorema de Bezout (débil) y el teorema de Euler.

9. Demostrar que toda curva de orden mayor o igual que 3 tiene al menos un punto de inflexión. Verificar que toda cónica no singular no tiene puntos de inflexión.

10. Sea \mathcal{C} una cúbica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

(a) Demuestre que si \mathcal{C} es no singular, entonces tiene nueve inflexiones.

(b) Demuestre que si \mathcal{C} es irreducible con un punto doble ordinario, entonces tiene tres puntos de inflexión los cuales están alineados.

Sugerencia: utilizar el ejercicio 18 de la práctica IX y el ejercicio 8

11. Probar que toda recta que pasa por dos inflexiones de una cúbica no singular corta a la misma en un tercer punto de inflexión.

12. Sea $C_m \equiv (x^3 + y^3 + z^3 + 3mxyz = 0)$ una cúbica de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con $m \in \mathbb{C}$

(a) Verificar que C_m es singular sii m es alguna de las raíces de $x^3 + 1$

(b) Verificar que cuando C_m es una curva singular, ésta se reduce a la unión de tres rectas.

(c) Verificar que $[0, 1, -1]$, $[-1, 0, 1]$, $[1, -1, 0]$, $[0, 1, \alpha]$, $[\alpha, 0, 1]$, $[1, \alpha, 0]$, $[0, 1, \beta]$, $[\beta, 0, 1]$ y $[1, \beta, 0]$ son todos los puntos de inflexión de C_m (α y β son las raíces de $x^3 + 1$ distintas de -1)