

Geometría Proyectiva

Práctica IX - Curvas algebraicas

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Sea f una curva afín y p un punto doble (es decir, un punto singular de $(f = 0)$). Probar que p es un nodo sii $f_{xy}^2 \neq f_{xx}f_{yy}$.
2. Definir punto singular, multiplicidad y cono tangente para una hipersuperficie algebraica afín $X = (f = 0) \subset k^n$.
3. Probar que $(0, 0)$ es un punto múltiple de las siguientes curvas afines; calcular las rectas tangentes en ese punto.

$$a) C_1 \equiv (y^2 - x^3 = 0) \qquad b) C_2 \equiv (y^2 - x^3 - x^2 = 0)$$

$$c) C_3 \equiv ((x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0) \quad d) C_4 \equiv ((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0)$$

4. La curva en \mathbb{R}^2 definida en coordenadas polares por $r = a \cos^3(\theta/3)$ es una séxtica con ecuación $4(x^2 + y^2 - ax)^3 = 27a^2(x^2 + y^2)^2$.
5. Las curvas en \mathbb{R}^2 dadas paramétricamente por

$$\alpha(t) = (a \sin(nt + d), b \sin(t))$$

(curvas de Lissajous) son algebraicas si n es racional.

6. Expresar la curva proyectiva de ecuación $x^2z - xy^2 - 2xyz - y^2z - 2yz^2$ en cada uno de los siguientes sistemas de coordenadas:
 - (a) Un sistema con $(1, 1, -1)$, $(1, 0, -2)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ como su cuadro de referencia.
 - (b) Algún sistema afín que tenga a $x + z = 0$ como su recta del infinito.
7. Sea S_2 el espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos de grado dos en $k[x, y, z]$. Denotaremos por

$$S_2(P_1, \dots, P_r) = \{f \in S_2 : f(P_i) = 0, i = 0, \dots, r\}$$

donde $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^2(k)$.

- (a) Verificar que $S_2(P_1, \dots, P_r)$ es un subespacio vectorial de S_2 .
- (b) Verificar que $\dim(S_2(P_1, \dots, P_r)) \geq 6 - r$.

- (c) Verificar que $\dim(S_2(P_1, \dots, P_r)) = 6 - r$ si $r \leq 5$ y no hay 4 de los P_i alineados. (*sug: utilice el ejercicio 6 de la práctica VII*).
- (d) Dados 6 puntos en $\mathbb{P}^2(k)$, es siempre posible hallar una cónica por ellos?
8. (a) Verificar que las cuádricas en $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ contienen rectas.
 (b) Verificar que las cuádricas en $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ contienen rectas.
 (c) Verificar que las cuádricas en $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ contienen planos.
 (d) Verificar que si n es par, las cuádricas en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contienen subespacios lineales de dimensión proyectiva $n/2 - 1$, mientras que si n es impar entonces las cuádricas en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ contienen subespacios de dimensión proyectiva $(n - 1)/2$.
- Sug: utilizar el teorema de clasificación proyectiva de cuádricas.*
9. Probar que la cuádrica proyectiva $\mathcal{C} \equiv \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \right)$ es reducible sii el determinante de la matriz $(a_{ij})_{ij}$ es nulo.
10. Demostrar que toda cuádrica proyectiva irreducible admite una parametrización racional.
11. Estudiar las singularidades en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ de la siguiente curva proyectiva:
- $$\mathcal{C} \equiv \left(x^2 y^5 - x^5 y^2 - 2xy^5 z + x^5 z^2 + y^5 z^2 - x^3 y z^3 + 2\alpha x^2 y^2 z^3 - xy^3 z^3 = 0 \right)$$
- con $\alpha \in \mathbb{C}$.
12. Hallar los puntos singulares de las siguientes curvas proyectivas:
- (a) $xz^2 - y^3 + xy^2 = 0$.
 (b) $(x + y + z)^3 - 27xyz = 0$.
 (c) $x^2 y^2 + 36xz^3 + 24yz^3 + 108z^4 = 0$.
13. Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que la curva proyectiva
- $$\mathcal{C} \equiv \left(x^3 + y^3 + z^3 + \alpha(x + y + z)^3 = 0 \right)$$
- tenga al menos un punto singular. Hallar los puntos singulares para cada α hallado. Hallar los $\alpha \in \mathbb{C}$ para los cuales la curva se descompone como unión de tres rectas.
14. Mostrar que si $\alpha \neq 2, 3, 6$ entonces la curva proyectiva
- $$\mathcal{C} \equiv \left(xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2 y + y^2 z + z^2 x + \alpha xyz = 0 \right)$$
- es no singular.

15. Mostrar que para cada $n > 0$ hay curvas no singulares de orden n .
16. Sea $X = (F = 0) \subset \mathbb{P}^2(k)$ con F homogéneo de grado d .
 Sea $p = [a : b : c] \in X$ un punto no singular y sea L la ecuación de la recta tangente proyectiva a X en p . Probar que la deshomogeneización L_* (respecto a la primera variable) es la ecuación de la recta tangente afín a F_* en el punto $(b/a, c/a)$ (suponiendo $a \neq 0$).
17. Demostrar que una curva algebraica $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grado d tiene un punto singular p de multiplicidad d si y sólo si X consiste de d rectas por p .
18. Sean $P = [0, 1, 0]$ un punto de inflexión de una cúbica irreducible C y $z = 0$ la recta tangente a C en P .
- Probar que C está definida por los ceros de un polinomio F de la forma $F = zy^2 + byz^2 + cxyz + \text{términos en } x \text{ y } z$.
 - Buscar un cambio de coordenadas proyectivo por el cual F se transforme en $zy^2 = f(x, z)$, con $f \in \mathbb{C}[x, z]_3$ (*sug: considere* $y \rightarrow y - b/2z - c/2x$).
 - Probar que toda cúbica irreducible es proyectivamente equivalente a una de las siguientes: $y^2z = x^3$, $y^2z = x^2(x + z)$ o $y^2z = x(x - z)(x - \lambda z)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0, 1$.
 - ¿Qué tipo de singularidad es P en cada una de las curvas de 18c)?
19. Sea $\mathcal{C} \equiv (F(x, y, z) = 0)$ una curva irreducible en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Sea $P \neq [1 : 0 : 0]$ y supongamos que el orden de contacto entre \mathcal{C} y la recta $(z = 0)$ en el punto P es uno.
 Probar que $F_x(P) = \frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$.