

Geometría Proyectiva

Práctica VIII - Polinomios

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Sea k un cuerpo, y considere el conjunto

$$k[X_0, \dots, X_n]_d = \{ \text{polinomios homogéneos de grado } d \text{ en } k[X_0, \dots, X_n] \}$$

Probar que $k[X_0, \dots, X_n]_d$ es un espacio vectorial y que los monomios de grado d forman una base de dicho espacio. Pruebe la fórmula de la dimensión

$$\dim(k[X_0, \dots, X_n]_d) = \binom{n+d}{d}$$

2. Dado $f \neq 0$ en $k[X_0, \dots, X_n]$, pruebe que $f \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ sii

$$f(tX_0, \dots, tX_n) = t^d f(X_0, \dots, X_n)$$

en $k[t, X_0, \dots, X_n]$.

3. Dado $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, pruebe la "fórmula de Euler"

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF$$

4. Sean $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y supongamos que $X_0 \nmid F$. Consideremos el polinomio $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ dado por $f(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$. Probar:

(a) $\text{gr } f = \text{gr } F$

(b) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.

(c) Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f . Concluir que F es irreducible sii f lo es.

5. Sean $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Definimos el operador $F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$ y asimismo el operador $f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0)$ si $\text{gr } f = d$. Más explícitamente, si $f = \sum_r a_r X^r$ donde $X = (X_1, \dots, X_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ y $\text{gr } f = d$, entonces

$$f^* = \sum_r a_r X^r X_0^{d-|r|}$$

Pruebe

- (a) $(FG)_* = F_*G_*$
(b) $(fg)^* = f^*g^*$
(c) Si r es la mayor potencia de X_0 que divide a F entonces $X^r(F_*)^* = F$ y $(f^*)_* = f$
(d) $(F + G)_* = F_* + G_*$ y $X_0^t(f + g)^* = X_0^r f^* + X_0^s g^*$,
donde $r = \text{gr } g$, $s = \text{gr } f$ y $t = r + s - \text{gr } (f + g)$.

6. Demostrar que si $F \in k[X, Y]_n$ con k algebraicamente cerrado, entonces, existen pares de constantes a_i, b_i tales que

$$F(X, Y) = a \prod (a_i X - b_i Y) \quad a \neq 0$$

7. Sean $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ dos polinomios homogéneos de grado r y $r + 1$ y sin factores comunes. Probar que $F + G$ es un polinomio irreducible.
8. Sean k un cuerpo infinito y $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ un polinomio que verifica $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todo $(a_0, \dots, a_n) \in k^n$. Demostrar que f es idénticamente nulo.
9. Sea A dominio de integridad y DFU. Probar que $A[X]$ es dominio de integridad y DFU. Idem para $A[X_1, \dots, X_n]$.
10. Sea A dominio de integridad y DFU. Dados $f, g \in A[X]$ de grado positivo,

$$f = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n, \quad f_n \neq 0$$

$$g = g_0 + g_1 X + \dots + g_m X^m, \quad g_m \neq 0$$

se define su **resultante** como el determinante de la siguiente matriz de $A^{(m+n) \times (m+n)}$

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & f_n & & & \\ & f_0 & \cdots & \cdots & f_{n-1} & f_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & f_0 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_m & & & & \\ & g_0 & \cdots & g_{m-1} & g_m & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & g_0 & \cdots & \cdots & g_m & \\ & & & & g_0 & \cdots & \cdots & g_m \end{vmatrix}$$

Se denomina **discriminante** de $f \in A[X]$ a la resultante de f y f' , es decir $\Delta(f) = R(f, f')$.

Probar que son equivalentes:

- (a) f y g tienen un factor común de grado positivo.
 - (b) Existen polinomios no nulos $\phi, \psi \in A[X]$ de grados menores que n y m respectivamente, tales que $\psi f = \phi g$.
 - (c) Existen polinomios A y $B \in A[X]$ tales que: $\text{gr } A < \text{gr } g$, $\text{gr } B < \text{gr } f$ y $Af + Bg = 0$
 - (d) $R(f, g) = 0$
11. Verificar que un polinomio $f \in A[X]$ tiene un factor múltiple sii su discriminante es 0.
12. Calcule el discriminante de un polinomio genérico $f \in A[X]$ de grado 2. Idem con f de grado 3 y de grado 4.
13. Dados $f, g \in A[X_1, \dots, X_r]$, podemos pensarlos como polinomios en $D[X_r]$, donde $D = A[X_1, \dots, X_{r-1}]$. Eso es

$$f = f_0 + f_1 X_r + \dots + f_n X_r^n, \quad f_n \neq 0$$

$$g = g_0 + g_1 X_r + \dots + g_m X_r^m, \quad g_m \neq 0$$

con $f_i, g_j \in D$. Reescriba los resultados del ejercicio 10 aplicados a este caso.

14. Dados $f, g \in k[X_1, \dots, X_r]$, con f irreducible. Suponga k cuerpo algebraicamente cerrado. Pruebe que si $g(a_1, \dots, a_r) = 0$ cada vez que $f(a_1, \dots, a_r) = 0$ (a_i es una r -upla de k^r), entonces $f \mid g$.
15. Sean $F, G \in k[X_0, X_1, \dots, X_r]$ homogéneos de grado n, m respectivamente. Supongamos que

$$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \dots + A_0X_0^n$$

$$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \dots + B_0X_0^m$$

con $A_i, B_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$, y $A_0B_0 \neq 0$. Sea $R(X_1, \dots, X_r)$ la resultante de F y G respecto de X_0 .

Pruebe que $R \in k[X_1, \dots, X_r]_{mn}$.

16. Sean $f, g \in k[X]$ mónicos, con k cuerpo algebraicamente cerrado, de manera que

$$f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \quad g = \prod_{j=1}^m (x - \beta_j)$$

Pruebe

$$R(f, g) = a \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) \quad a \neq 0, a \in k$$

17. Sea T un cambio de coordenadas lineal $T : \mathbb{P}^r(k) \rightarrow \mathbb{P}^r(k)$ ($r \geq 2$).

Pruebe

- (a) T induce un isomorfismo de $\tilde{T} : k[X_0, \dots, X_r]_n \rightarrow k[X_0, \dots, X_r]_n$ para todo $0 \leq n$.
- (b) Dado $F \in k[X_0, \dots, X_r]_n$, existe un cambio de coordenadas tal que $F = A_n + A_{n-1}X_0 + \dots + A_0X_0^n$ con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$.
- (c) Dados F, G homogéneos de grado n, m respectivamente, existe un cambio de coordenadas de manera que en el nuevo sistema, se tiene

$$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \dots + A_0X_0^n$$

$$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \dots + B_0X_0^m$$

con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$ y $A_0B_0 \neq 0$.