

Geometría Proyectiva

Práctica VII - Geometría axiomática

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Sea A un plano afín, supongamos que $A \neq \emptyset$. Diremos que $L_1 // L_2$ si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ o bien $L_1 = L_2$. Probar:
 - (a) La relación $L_1 // L_2$ es una relación de equivalencia.
 - (b) A tiene al menos 4 puntos distintos, de los cuales no hay 3 en una misma recta.
 - (c) Para todo par de rectas L_1 y L_2 se verifica, $\#L_1 = \#L_2$.
 - (d) Dada L una recta cualquiera de A si A es finito, entonces $\#A = (\#L)^2$
2. Sea \mathbb{P}^2 un plano proyectivo finito con m elementos. Probar que $m = n^2 + n + 1$ donde $n + 1$ es el número de elementos de cualquier recta de \mathbb{P}^2 .
3. Sea k un cuerpo. Demostrar que:
 - (a) Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{P}^n(k)$ y el conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}^n(k)$
 - (b) Dado $p \in \mathbb{P}^n(k)$, notemos con p^* al hiperplano correspondiente, y dado H un hiperplano, H^* designa al punto correspondiente. Probar que $p^{**} = p$ y $H^{**} = H$
4. Sea k un cuerpo finito con q elementos. Hallar la cantidad de:
 - (a) Puntos en $\mathbb{P}^n(k)$.
 - (b) Hiperplanos en $\mathbb{P}^n(k)$.
 - (c) Cónicas en $\mathbb{P}^n(k)$
 - (d) r -planos en $\mathbb{P}^n(k)$ para $r = 0, \dots, n$
5. Sea $U_i = \{[x_0, x_1, x_2] : x_i \neq 0\}$. ¿Cuáles son los puntos de $\mathbb{P}^2(k)$ que no están en dos de los tres conjuntos U_0, U_1, U_2 ?
6. Demostrar que dados $n + 2$ puntos en $\mathbb{P}^n(k)$ tales que no hay ningún subconjunto de $n + 1$ dependientes, existe un único sistema de coordenadas en el cual estos puntos tienen coordenadas $[1, 0, \dots, 0], [0, 1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1], [1, 1, \dots, 1]$ respectivamente. Este conjunto de puntos forma lo que se conoce como el “cuadro de referencia” del sistema de coordenadas mencionado.

7. Sea $T \in GL(n+1, k)$ demostrar que T induce una transformación \bar{T} de $\mathbb{P}^n(k)$ en si mismo. Pruebe que \bar{T} es la identidad sii T es una homotecia no nula. Se define el **grupo lineal proyectivo** $PGL(n+1, k)$ como $GL(n+1, k)/k^*$. Demuestre que $PGL(n+1, k)$ actúa efectiva y transitivamente sobre $\mathbb{P}^n(k)$.
8. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal de espacios vectoriales sobre un cuerpo k . Sea $\pi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}V$ la aplicación canónica al espacio proyectivo asociado a V . Probar que f induce una aplicación $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}V - S \rightarrow \mathbb{P}W$ donde $S = \pi(\ker(f) - \{0\})$.
- En particular, para cada subespacio lineal $V' \subset V$, tomando $S = \pi(V' - \{0\})$ se tiene una aplicación $\mathbb{P}V - S \rightarrow \mathbb{P}(V/V')$ denominada *proyección con centro* S . Otro caso particular: si $f : V \rightarrow V$ es un isomorfismo lineal entonces $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}V \rightarrow \mathbb{P}V$ es un isomorfismo proyectivo; además, $\mathbb{P}(f) = id_{\mathbb{P}V}$ si y sólo si f es una homotecia no nula.
9. Un conjunto P_0 de puntos y rectas de un plano proyectivo axiomático forma un **plano parcial** si por cada par de puntos diferentes de P_0 pasa a lo sumo una recta. Pruebe
- El plano afín es un plano parcial.
 - Todo plano parcial puede extenderse (agregando puntos y rectas) a un plano proyectivo.
10. Se llama **anillo ternario** a un conjunto R de al menos 2 elementos (que distinguiremos con los nombres **0** y **1**) y una operación ternaria $T : R \times R \times R \rightarrow R$ que cumple los siguientes axiomas:
- A1** Para toda terna $a, b, c \in R$, $T(0, b, c) = T(a, 0, c) = c$
- A2** Para todo $a \in R$ se tiene $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$
- A3** Si $m, m', b, b' \in R$ y $m \neq m'$, entonces la ecuación $T(x, m, b) = T(x, m', b')$ tiene una única solución $x \in R$
- A4** Si $a, a', b, b' \in R$ y $a \neq a'$, el sistema de ecuaciones $T(a, x, y) = b, T(a', x, y) = b$ tiene una única solución $(x, y) \in R \times R$
- A5** Dados $a, m, b \in R$, la ecuación $T(a, m, x) = b$ tiene única solución $x \in R$
- Considere el grupo G dado por elementos $\{x + ay : x, y \in \mathbb{Z}_3\}$ donde $+$ es la suma usual y a es un elemento que obedece las relaciones

$$0 = 0+0.a \quad 1 = 1+0.a \quad (v+w)z = vz+wz \quad a.a = 2 \quad a.(a+1) = 2.a+1$$

$$a.(a+2) = a+1 \quad a.(2.x) = 2.(a.x)$$
 Calcule la tabla de multiplicación del grupo G . Pruebe que G con la operación $T(x, m, b) = mx + b$ es un anillo ternario.

- (b) Pruebe que los números de Cayley con la operación $T(x, m, b) = m.x + b$ forman un anillo ternario.
- (c) El plano afín sobre un cuerpo ($A(k) = k \times k$) con $R = k$ y la operación $T(x, m, b) = mx + b$ es un anillo ternario.
- (d) El plano proyectivo axiomático \mathbb{P}^2 induce un anillo ternario de la siguiente manera:

Tomamos cuatro puntos de los cuales no haya 3 alineados, y los llamamos $\{O, E, A, B\}$ respectivamente (esto es posible por el ejercicio 1 de la practica). Los elementos de R son todas las rectas por A menos la AB . La recta AO es el 0 del anillo ternario, y la recta AE el 1. Las rectas de que pasan por B cortan a la recta OE en algún punto, que llamamos C . Identificamos a esta recta por B con la recta AC . De esta manera $0 = OB = OA$ y $1 = BE = AE$ (en el anillo R).

Ahora dado un punto $M \in \mathbb{P}^2$ que no esté en AB , consideremos las rectas AM y BM ; estas inducen elementos $(a, b) \in R \times R$ por la construcción previa; por otra parte si $M \in AB$, entonces la recta OM corta AE en un punto, y este punto se identifica por el caso previo con un par $(1, m)$ en el anillo. Le asignamos al punto M el elemento (m) . Al punto A se le asigna un **nuevo** elemento (que no está en el anillo), que denotaremos con (∞) . Hemos construido una biyección entre todos los puntos de \mathbb{P}^2 y las familias $(a, b); (m); (\infty)$.

Llamando x a la primer coordenada de los pares ordenados e y a la segunda, las rectas también son clasificables en cuatro grupos: las que pasan por A son los conjuntos de puntos de la pinta $x = a$ (con a fijo en r); las que pasan por B son los conjuntos de puntos de la pinta $y = b$; la recta OE es el conjunto de puntos $y = x$. Veamos las rectas restantes (es decir, las que no pasan por A ni por B ni son la OE): estas rectas cortan AB en un punto **distinto** de A y de B , que hemos identificado en el párrafo anterior con el elemento (m) ; en forma similar estas rectas cortan AO en un punto distinto de A , y la recta que pasa por B y este punto en cuestión determinan un elemento b del anillo. Los elementos m y b determinan unívocamente esta recta, y entonces dado un elemento x del anillo, este determina una recta por A , que corta nuestra recta en

un punto Q . La recta que pasa por Q y B determina entonces un único elemento y del anillo, lo que nos permite definir una operación ternaria $T(x, m, b) = y$. Pruebe que la operación T cumple los axiomas de anillo ternario.

11. Dado un anillo ternario R con operación T , considere el conjunto

$$A = \cup \{(x, y) : x, y \in R\}$$

y la familia de subconjuntos

$$\mathcal{L}_1 = \{(a, y) : a \text{ fijo}\} \quad \mathcal{L}_2 = \{(x, T(x, m, b)) : m, b \text{ fijos}\}$$

pruebe que A es un plano afín axiomático cuyas rectas son los conjuntos de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .

12. Dado un anillo ternario R con operación T , y un elemento (∞) que no pertenece al mismo, considere el conjunto

$$\mathbb{P}^2 = \cup_{a,b \in R} \{(a, b)\} \cup \cup_{m \in R} \{(m)\} \cup \{(\infty)\}$$

y la familia de subconjuntos de \mathbb{P}^2

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, y) : a \text{ fijo}\} \cup \{(\infty)\} \quad \mathcal{C}_2 = \{(x, T(x, m, b)) : m, b \text{ fijos}\} \cup \{(m)\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \cup_{m \in R} \{(m)\} \cup \{(\infty)\}$$

Pruebe que \mathbb{P}^2 es un plano proyectivo (donde las rectas son la familia de subconjuntos de \mathcal{C}_i).

13. Construya un anillo ternario a partir de un plano afín axiomático.
14. Muestre que sacando una recta cualquiera del plano proyectivo axiomático se obtiene un plano afín. Como extendería un plano afín para obtener un plano proyectivo?
15. Considere el plano proyectivo sobre un anillo de división k , definido como $\mathbb{P}^2(k) = k \times k \times k - \{(0, 0, 0)\} / \sim$, donde $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ sii existen $\lambda, \mu \in k - 0$ tales que $\lambda.(x, y, z) = \mu.(x', y', z')$.

Las rectas de este plano son los subconjuntos $[a.p_0 + b.q_0, a.p_1 + b.q_1, a.p_2 + b.q_2]$, con a y b paseando por $k - 0$, aquí $[\]$ denota la clase en el cociente, y $P = [p_0, p_1, p_2]$ $Q = [q_0, q_1, q_2]$ son dos puntos del plano proyectivo. Esta es la "recta por P y Q ".

- (a) Pruebe que \sim es una relación de equivalencia.

- (b) Pruebe que $\mathbb{P}^2(k)$ es un plano proyectivo, y que este plano es Desarguiano (es decir, cumple la propiedad de Desargues).
 - (c) Escribiendo el sistema de ecuaciones, pruebe que el plano cumple la propiedad de Pappus si k es conmutativo.
16. Dado un anillo ternario R , considere las operaciones $+$ y \cdot definidas de la siguiente manera:

$$a + b = T(a, 1, b) \quad a \cdot b = T(a, b, 0)$$

- (a) Interprete geoméricamente estas operaciones en los planos afín y proyectivo inducidos por el anillo R .
- (b) Pruebe las relaciones

$$a + 0 = 0 + a = a \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- (c) Pruebe que en cualquiera de las dos relaciones $a + b = c$ ó $a \cdot b = c$, dados dos cualesquiera de ellos, el tercero está unívocamente determinado.
 - (d) Es posible probar que si R es el anillo ternario construido mediante el plano proyectivo axiomático en el ejercicio 10d, y este plano cumple la propiedad de Desargues, entonces R con estas operaciones es un anillo de división (sin embargo, es bastante complicado).
17. Considere el anillo ternario R con las operaciones del ejercicio anterior, y considere el conjunto $R^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(R)$ como el cociente de este conjunto mediante la clausura de la relación de equivalencia del ejercicio 15 (es decir, toda cadena finita es equivalente). Las rectas son las mismas que las del ejercicio en cuestión. Sólo para pensar:
- (a) $\mathbb{P}^2(R)$ es un plano proyectivo axiomático.
 - (b) Existe una biyección entre este plano proyectivo y el construido mediante R en el ejercicio 12.
 - (c) En el ejercicio anterior mencionamos que si el anillo proviene de un plano Desarguiano, entonces es un anillo de división. En este caso, no es necesario clausurar la relación de equivalencia, se prueba fácilmente que $\mathbb{P}^2(R)$ es en efecto un plano proyectivo, y además es sencillo mostrar la biyección entre el plano del ejercicio 12 y $\mathbb{P}^2(R)$.
 - (d) Los ítems 10a y 10b del ejercicio 10, junto con el ejercicio 12 nos proveen de dos ejemplos explícitos de planos **no Desarguianos**.

Referencias: SANTALÓ, Luis A. - Geometría proyectiva. BIRKHOFF, Garret - Lattice Theory.