

# Geometría Proyectiva

## Práctica VI - Geodésicas

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Mostrar que si  $r(u, v)$  es una parametrización ortogonal (es decir,  $F = 0$ ), se tiene que:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

2. Justificar por qué las siguientes superficies no son localmente isométricas:
  - (a) La esfera.
  - (b) El cilindro.
  - (c) La silla de montar ( $z = x^2 - y^2$ ).
3. Mostrar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en una esfera o un plano.
4. Hallar las geodésicas de una superficie de revolución.
5. Hallar las geodésicas de:
  - (a) Un plano.
  - (b) Una esfera.
  - (c) Un cilindro.
  - (d) Un cono circular recto.
6. Escribir la ecuación diferencial de las geodésicas para la superficie  $F(x, y, z) = 0$ . Especializar para  $z = f(x, y)$ .

Sean  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva de coordenadas  $(r(s), z(s))$  y  $S$  la superficie de revolución dada por  $\varphi(s, \theta) = (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$ . Demostrar que el círculo de ecuación  $s = s_0$  ( $s_0 = \text{cte}$ ) es una geodésica sii todos los vectores tangentes a las curvas  $s \mapsto \varphi(s, \theta_0)$  son paralelos al eje de rotación de la superficie (en este caso el eje  $z$ ) en  $s_0$ .
7. Sea  $\alpha$  una curva en  $M$  con curvatura nunca nula. Probar que  $\alpha$  es una curva asintótica sii el plano osculador a la curva en  $\alpha(t)$  coincide con el plano tangente a la superficie en  $\alpha(t)$  (para todo  $t$ ).
8. Probar que una geodésica es una curva asintótica sii es una recta.
9. Las geodésicas de un helicoides recto (superficie tangencial de una hélice circular) se pueden determinar usando integrales elípticas. Ver Struik sec. [4.2].