

Geometría Proyectiva

Práctica V - Primera forma fundamental

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Calcular la primera forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas en los puntos regulares:

(a) Elipsoide: $r(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$

(b) Paraboloide elíptico: $r(u, v) = (au \cos(v), b(u) \sin(v), u^2)$

(c) Paraboloide hiperbólico: $r(u, v) = (au \cosh(v), bu \sinh(v), u^2)$

(d) Hiperboloide de dos hojas:

$$r(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u))$$

2. Hallar la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.
3. Las curvas coordenadas de una parametrización $r(u, v)$ forman una **red de Tchebyshev** si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para esto es que $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$.
4. Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental son $E = 1, F = \cos(\theta), G = 1$, donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.
5. Mostrar que toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que queden $E = E(v), F = 0$ y $G = 1$.
6. El gradiente de una función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable $\mathbf{grad}(f) : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asigna a cada punto $p \in S$ el vector $\mathbf{grad}(f)(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ de modo que vale $\langle \mathbf{grad}(f)(p), v \rangle_p = df_p(v)$ para todo $v \in T_p S$. Mostrar que:

- (a) Si E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental en una parametrización $r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, entonces $\mathbf{grad}(f)$ está dado en $r(U)$ por

$$\mathbf{grad}(f) = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} r_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} r_v$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ con la parametrización usual $r(x, y) = (x, y, 0)$ se tiene $\mathbf{grad}(f) = f_x e_1 + f_y e_2$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 . Notar que este caso coincide con la definición habitual del gradiente de funciones en \mathbb{R}^2 .

- (b) Si $p \in S$ permanece fijo y v varía en el círculo unitario de $T_p S$, entonces $df_p(v)$ es máximo si y sólo si $v = \frac{\text{grad}(f)}{|\text{grad}(f)|}$, es decir que la dirección de $\text{grad}(f)$ da la dirección de máxima variación de f en p .
- (c) Si $\text{grad}(f) \neq 0$ en todos los puntos de la *curva de nivel*

$$C_a = \{q \in S : f(q) = a\}$$

entonces C_a es una curva regular en S y $\text{grad}(f)$ es normal a C_a en todos los puntos de la curva.

7. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas (sug: analizar la *indicatriz de Dupin*).
8. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano sobre una curva, entonces los puntos de esta curva son planares o parabólicos.
9. Describir las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss para las siguientes superficies:
 - (a) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$
 - (b) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
 - (c) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$
10. Suponiendo que el plano osculador de una línea de curvatura $C \subset S$, que nunca es tangente a una dirección asintótica, forma un ángulo constante con el plano tangente de S a lo largo de C , probar que C es una curva plana.
11. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ las curvaturas normales en $p \in S$ a lo largo de las direcciones que forman ángulos de $0, \frac{2\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$ respectivamente con una dirección principal. Probar que $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = mH$ donde H es la curvatura media en p (sug: considerar el *teorema de Euler*.)
12. Si S es una superficie reglada, hallar las expresiones para sus primera y segunda formas normales, su curvatura y estudiar las direcciones principales.
13. Idem ejercicio 12 pero para $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$.
14. Determinar las curvas asintóticas y líneas de curvatura de

$$S = \{(x, y, z) : z = xy\}.$$

15. En este ejercicio se analiza la **pseudoesfera**.
 - (a) Determinar una ecuación para la curva plana C con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una línea L (en el plano) que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la **tractriz**.

- (b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene el conjunto S . Determinar si S es una superficie regular y hallar una parametrización en un entorno de un punto regular. S es la **pseudoesfera**.
- (c) Mostrar que la curvatura Gaussiana en todo punto regular de la pseudoesfera es -1 .
16. Sea $[\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)]$ la parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k . Para determinar ϕ y ψ se elige v de modo que $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$ (es decir que v es la longitud de arco de la curva generatriz). Mostrar que:
- (a) ϕ satisface $\phi'' + k\phi = 0$ y $\psi = \int \sqrt{1 - (\phi')^2} dv$. Se toma $0 < u < 2\pi$ y el dominio de v de modo que la última integral está definida.
- (b) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por
- $$\phi(v) = C \cos(v) \quad y \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)} dt$$
- donde C es una constante. Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de la curva cortada con el plano xz para los casos $C = 1$, $C > 1$ y $C < 1$. Observar que $C = 1$ representa S^2 .
- (c) Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:
- $\phi(v) = C \cosh(v)$ y $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2(t)} dt$.
 - $\phi(v) = C \sinh(v)$ y $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2(t)} dt$.
 - $\phi(v) = e^v$ y $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}} dt$.
- Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de cada superficie cortada con el plano xz .
- (d) La última superficie del ítem previo es la pseudoesfera del ejercicio 15.
- (e) Las únicas superficies de revolución con $k = 0$ son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.
17. Considerar la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2$ con $-1 < x < 1$ alrededor de la recta $x = 1$. Mostrar que los puntos obtenidos por rotación del $(0, 0)$ son puntos planos de la superficie.
18. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
(Ver Struik, sec. [2.6], al final).