

Geometría Proyectiva

Práctica IV - Variedades en \mathbb{R}^n

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Sean S una subvariedad de \mathbb{R}^n y $(U, \varphi), (V, \psi)$ dos parametrizaciones de S tales que $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$.

Probar que $\psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. Concluir que las funciones diferenciables en la subvariedad y el plano tangente están bien definidos.

2. Sea $M \equiv \{F_i = 0\}_{i=1\dots k} \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\langle DF_i(p) \rangle_{i=1\dots k}$ es un conjunto linealmente independiente para todo $p \in M$. Sabemos que M es una variedad de dimensión $n - k$ (función implícita mediante). Considere para cada $p \in M$ los subespacios

- (a) $T_p M = D\phi_{\phi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^{n-k})$ si $\phi: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de M en un entorno de p
(b) $\cap_{i=1}^k \text{Ker}(DF_i)$

Pruebe que estos dos subespacios son iguales para todo $p \in M$.

(Esto nos da una caracterización mediante ecuaciones del espacio tangente a una variedad dada por ecuaciones)

3. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, y sean $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ variedades dadas por ecuaciones. Supongamos además que $f(X) \subset Y$.

Pruebe

- (a) $df(TX) \subset TY$
(b) $D\phi|_{TX}: TX \rightarrow TY$ coincide con $d(f|_X)$ (aquí D denota la diferencial usual de \mathbb{R}^n y d la diferencial para aplicaciones entre variedades).

4. Sean $C \equiv \{F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $p \in \mathbb{R}^3 - C$. Definimos el **cono** de C por p como el conjunto de rectas que pasan por p y algún punto de C , es decir

$$\text{cono}(p, C) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{C}, w \in C \text{ t.q. } p = \lambda(w - v)\}$$

- (a) Suponga primero que $G = z - 1, p = (0, 0, 0)$. Encuentre una ecuación para $\text{cono}(p, C)$ utilizando las ecuaciones de C .
(b) Sólo para pensar: Que pasa si F y G son arbitrarias? (no sabemos la respuesta!!).

5. Sean S una subvariedad de \mathbb{R}^n y $v \in T_p S$

- (a) Probar que existe una curva diferenciable $\alpha_v: I \rightarrow S$ tal que $\alpha_v(0) = p$ y $\alpha'_v(0) = v$. Una tal curva se dice una **una curva integral de v** .
- (b) Si $\mathcal{E}_p = \{\text{funciones diferenciables en un entorno de } p\}$, entonces

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha_v)$$

define una función lineal $v: \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$v(f \cdot g) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$$

(a una tal función se la denomina una **derivación**).

El conjunto de las derivaciones en \mathcal{E}_p es un espacio vectorial, que denotaremos $Der_p S$. El ítem anterior nos permite definir una aplicación

$$\theta: T_p S \rightarrow Der_p S$$

de la siguiente manera: si $v \in T_p S$, entonces

$$\theta(v)(f) = (f \circ \alpha_v)'(0) \quad \text{para } f \in \mathcal{E}_p.$$

Pruebe que θ está bien definida, y que es un isomorfismo.

6. Sea X una variedad en \mathbb{R}^n dada por ecuaciones las $\{F^i(\mathbf{x}) = 0\}$. Sea TX la variedad en \mathbb{R}^{2n} definida por las ecuaciones $\{F^i(\mathbf{x}) = 0, DF^i_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0\}$ suponiendo que las coordenadas de \mathbb{R}^{2n} se escriben (\mathbf{x}, \mathbf{y}) donde \mathbf{x} e \mathbf{y} son n -uplas. Esta variedad se llama **fibrado tangente de X** .

- (a) Demostrar que si X es regular de dimension d entonces TX es regular de dimension $2d$.
- (b) Sea $\pi: TX \rightarrow X$ la primera proyección. Verificar que $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ se identifica con el espacio tangente $T_{\mathbf{x}}X$. Aquí no es necesario suponer que X es regular.
- (c) Si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación diferenciable (X, Y regulares) entonces la aplicación $df: TX \rightarrow TY$ definida por $df(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), df_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}))$ es diferenciable.

7. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad conexa y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

Demostrar que si $df_p \equiv 0$ ($\forall p \in M$), entonces f es constante.

8. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Demostrar que si f tiene un máximo (mínimo) en x_0 , entonces $df_{x_0} \equiv 0$

9. Multiplicadores de Lagrange

Sean $F^1, \dots, F^k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($k < n$) y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Probar que si x_0 es un máximo (mínimo) de f sujeta a las condiciones

$$F^1 \equiv 0 \dots F^k \equiv 0,$$

entonces existen escalares $\lambda_1 \dots \lambda_k$ tal es que

$$Df_{x_0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i DF_{x_0}^i$$

¿Qué hipótesis es necesario formular sobre las F_i ?

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $d: S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(p) = |p - p_0|$ para $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$ fijo. O sea que d es la distancia habitual en \mathbb{R}^3 entre puntos de S y un punto fijo.

Probar que d es diferenciable. Calcular su diferencial.

11. Sea $\mathcal{S}(n) = \{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M = M^t \}$. Demostrar que $\mathcal{S}(n)$ es una subvariedad de dimensión k en \mathbb{R}^{n^2} , calcular k y el plano tangente a $\mathcal{S}(n)$ en I . (I nota a la matriz identidad).

12. *Grupos clásicos reales.* Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) Grupo general lineal

$$GL(n) = \{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(M) \neq 0 \}$$

(b) Grupo especial lineal o unimodular

$$SL(n) = \{ M \in GL(n) \mid \det(M) = 1 \}$$

(c) Grupo ortogonal

$$O(n) = \{ M \in GL(n) \mid MM^t = M^t M = I \}$$

(d) Grupo especial ortogonal

$$SO(n) = \{ M \in O(n) \mid \det(M) = 1 \}$$

Demostrar que son variedades y calcular su dimensión.

(Para el caso $O(n)$ considere la aplicación $f: O(n) \rightarrow \mathcal{S}(n)$ definida por $M \mapsto MM^t$. Calcule la diferencial de f en M y demuestre que, si $f(M) = I$, entonces df_M es un epimorfismo. ($df_M: T_M O(n) \rightarrow T_I \mathcal{S}(n)$)

13. Demostrar que las álgebras de matrices $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$ y $\mathfrak{o}(n)$, son los espacios tangentes a la identidad de los grupos $GL(n)$, $SL(n)$ y $O(n)$ respectivamente, donde $\mathfrak{gl}(n)$ es el conjunto de todas las matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y:

$$\mathfrak{sl}(n) = \{ M \in \mathfrak{gl}(n) \mid \text{traza}(M) = 0 \}$$

$$\mathfrak{o}(n) = \{ M \in \mathfrak{gl}(n) \mid M = -M^t \}$$