

Geometría Proyectiva

Práctica III - Cónicas y cuádricas

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Demostrar que las secciones planas de un cono (intersección del cono con distintos planos) en \mathbb{R}^3 son cónicas. Interpretar la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado para la sección.
2. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo a sea

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) + d(x, q) = 2a\}$$

con $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

- (a) Demostrar que \mathcal{X} es una elipse.
 - (b) Los puntos p y q son llamados **focos**. Ver que el punto medio entre los focos es el centro de la elipse.
 - (c) Toda elipse puede obtenerse por esta construcción.
3. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real positivo a sea

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) - d(x, q) = 2a\}$$

con d igual al ejercicio 2. Probar que \mathcal{X} es una hipérbola y que toda hipérbola se puede obtener de esta forma.

4. Mostrar que dada una elipse que refleje como un espejo los rayos de luz en el plano, los rayos emitidos desde un foco pasan, luego de reflejarse, por el otro foco.
5. Para $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no contiene a p , sea

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) = d(x, L)\}.$$

- (a) Probar que \mathcal{X} es una parábola.
- (b) Toda parábola se obtiene de esta forma.
- (c) El punto p es el **foco** de la parábola y la recta L es su **eje**. Una parábola que refleja la luz concentra los rayos de dirección perpendicular a su eje y provenientes del semiespacio que contiene al foco en este punto.

6. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la cónica de ecuación cuadrática $F = 0$ y $p \in \mathbb{R}^2 - C$. Hallar los puntos $x \in C$ tales que la recta tangente a C en x pasa por p .
7. Considere el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Halle parametrizaciones que lo cubran.
8. Hallar una parametrización del hiperboloide de dos hojas

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}.$$

9. La **proyección estereográfica** permite definir un sistema de coordenadas para la esfera S^2 (y más en general para S^n). Para esto, considérese la esfera S de radio unitario, con eje vertical z y apoyada sobre el plano xy , descrita por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ y sea $N = (0, 0, 2) \in S$ su “polo norte”. Se define $\pi : S - N \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\pi(x) = q \in \mathbb{R}^2$ si q es la intersección de la línea que pasa por N y x con el plano $z = 0$.

(a) Mostrar que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ está dada por

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

(b) Mostrar que, usando la proyección estereográfica es posible cubrir la esfera con dos parametrizaciones.

10. Generalización del ejercicio 9. Sea $Q = (F = 0) \subset \mathbb{R}^n$ una cuádrica. Tomemos $p \in Q$ un punto regular y un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ que no contiene a p . Definimos $\pi : Q - \{p\} \rightarrow H$ por $\pi(x) = L(x, p) \cap H$, donde $L(x, y)$ denota la recta que pasa por x e y . En realidad, esta relación no es necesariamente una función ya que para algunos $x \in Q - \{p\}$ puede ser que $L(x, p) \cap H = \emptyset$.

(a) Determinar el dominio, imagen y región de inyectividad de π .

(b) Calcular su inversa en donde tenga sentido.

[Se sugiere comenzar por los casos $n = 2$ y $n = 3$. Puede ser útil considerar primero las formas canónicas].

11. Demostrar que por cada punto del hiperboloide de una hoja

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

en \mathbb{R}^3 pasan dos rectas contenidas en el hiperboloide.

Piense que rectas (o variedades lineales) contienen las otras cuádricas (sin demostración).

12. Escribir la ecuación de una superficie cúbica en \mathbb{R}^3 que contenga exactamente una recta. Escribir otra que contenga exactamente tres rectas.