

Geometría Proyectiva

Práctica II - Curvas en el espacio: el Triedro de Frenet

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Probar que bajo cualquiera de las condiciones siguientes la curva en cuestión es una recta:
 - (a) Todas las tangentes a la curva pasan por un punto fijo.
 - (b) Todas las tangentes a la curva son paralelas a una recta dada.

2. Hallar el vector tangente unitario a la curva en \mathbb{R}^3 definida por

$$(F_1(x, y, z) = 0) \cap (F_2(x, y, z) = 0).$$

3. Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ **parametrizada por longitud de arco**, denotemos con $\mathbf{t}(s)$ al vector tangente unitario a $\alpha(s)$. Como en el espacio no hay manera de elegir de manera natural un vector ortogonal a \mathbf{t} , definimos la **curvatura** de α como el escalar positivo

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)|,$$

y el vector **normal** a $\alpha(s)$ como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|}.$$

De esta manera, se tiene

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Definimos asimismo el vector **b** o **binormal** como el único vector unitario tal que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de \mathbb{R}^3 , es decir,

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Probar:

- (a) $\mathbf{b}'(s)$ es múltiplo de $\mathbf{n}(s)$ para todo $s \in I$.
- (b) De acuerdo al ítem anterior, podemos escribir

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

τ se denomina la **torsión** de α . Mostrar que

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa^2(s)}.$$

4. Verificar que las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{t} \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{R} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

donde \mathbf{R} es la curva definida por $\mathbf{R} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$.

5. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva (no necesariamente parametrizada por la longitud de arco) y sea $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $\alpha(I)$ por la longitud de arco $s = s(t)$ medido desde $t_0 \in I$. Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y denotemos $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$ y $\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \alpha'''$. Probar que:

(a)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|} \quad \text{y} \quad \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4}$$

(b) La curvatura de α en t :

$$k(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

Hint: utilice la regla de la cadena y tome $|\cdot|^2$.

(c) La torsión de α en t :

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

6. Hallar la curvatura y torsión de las siguientes curvas en \mathbb{R}^3 .

(a) $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

(b) $x = u$, $y = \frac{1+u}{u}$, $z = \frac{1-u^2}{u}$. Notar que $\tau = 0$.

(c) $y = f(x)$, $z = g(x)$.

(d) $x = a(u - \sin(u))$, $y = a(u - \cos(u))$, $z = bu$.

(e) $x = a(3u - u^3)$, $y = 3au^2$, $z = a(3u + u^3)$.

7. Una **traslación** por un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es la aplicación $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(p) = p + v$. Una aplicación lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una **transformación ortogonal** si $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$. Un **movimiento rígido en \mathbb{R}^3** es la composición de una traslación seguida por una transformación ortogonal con determinante positivo (esto último para preservar la orientación de \mathbb{R}^3).

- (a) Mostrar que la norma de un vector y el ángulo θ entre dos vectores ($0 \leq \theta \leq \pi$) son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.
 - (b) Mostrar que el producto vectorial de dos vectores es covariante (es decir, $T(u) \times T(v) = T(u \times v)$) para transformaciones ortogonales con determinante positivo. Qué ocurre con las transformaciones ortogonales de determinante negativo?
 - (c) Probar que la longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.
8. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura nunca nula. Similarmente al caso plano, se llama **centro de curvatura de α en s_0** a:

$$\beta(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$$

y se llama **círculo osculador a α en s_0** al círculo de centro $\beta(s_0)$ y radio $\rho(s_0) = |\kappa(s_0)|^{-1}$, contenido en el plano osculador a $\alpha(s_0)$. Probar:

- (a) Una expresión paramétrica para el círculo oscilador en $\alpha(s_0)$ es

$$\alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} [\cos(\theta) \mathbf{t}(s_0) + (\sin(\theta) + 1) \mathbf{n}(s_0)]$$

- (b) La curva α y el círculo osculador a α en s_0 tienen contacto de segundo orden.
 - (c) La curva β es la **evoluta** de α y α es la **evolvente** de β . Probar que las tangentes a la evoluta son normales a la evolvente en los puntos respectivos.
9. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es llamada **hélice** si las tangentes de α forman un ángulo constante con alguna dirección fija. Asumiendo que $\tau(s) \neq 0 \forall s \in I$, probar que:
- (a) Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - i. α es una hélice.
 - ii. $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante.
 - iii. Las rectas que contienen a $\mathbf{n}(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ son paralelas a un plano fijo.
 - iv. Las rectas que contienen a $\mathbf{b}(s)$ y pasan por $\alpha(s)$ tienen un ángulo constante con una dirección fija.

(b) La curva

$$\alpha(s) = (a \cos(\frac{s}{c}), a \sin(\frac{s}{c}), b \frac{s}{c})$$

con $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c constantes tales que $c^2 = a^2 + b^2$ es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$.

10. Probar que si la cúbica $x = at$, $y = bt^2$, $z = t^3$ satisface la condición $2b^2 = 3a$, entonces es una hélice trazada sobre un cilindro de generatrices paralelas al plano xz y que forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x . Hallar la ecuación del cilindro.

11. Probar que las tangentes a una hélice cortan un plano normal a su cilindro proyectante en puntos de la evolvente de la base del cilindro.

12. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, y sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su reparametrización por longitud de arco.

Si $\beta_1, \beta_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$, considere $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), t).$$

(a) Demuestre que γ es una hélice.

(b) Demuestre que lo mismo vale para toda curva parametrizada por longitud de arco (o toda curva "uniforme").

13. Dada una curva α en \mathbb{R}^3 se considera la curva β obtenida al trasladar los vectores tangentes unitarios de α al origen. La curva β es una curva en la esfera unitaria S^2 y es llamada la **indicatriz esférica** de α .

(a) Probar que $|\kappa_\beta| = \frac{ds_\beta}{ds_\alpha}$.

(b) Hallar la indicatriz circular de una recta, una hélice circular y una curva plana.

(c) Verificar que en el caso de una curva plana vale $\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{d\theta}{ds_\alpha} n_\alpha$ donde θ es el ángulo entre un eje fijo y β . Por lo tanto, para una curva plana,

$$\kappa_\alpha = \frac{d\theta}{ds}.$$

14. Probar que la indicatriz esférica de una curva es una circunferencia si y sólo si la curva es una hélice.

15. Probar que la curva dada por

$$x = a \sin^2(u), \quad y = a \sin(u) \cos(u), \quad z = a \cos(u)$$

está sobre una esfera y que todos los planos normales pasan por el origen. Probar que la curva es una cuártica.

16. Sea α una curva en \mathbb{R}^3 tal que $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I \subset \mathbb{R}$. Probar que α está contenida en una esfera si y sólo si

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A$$

con $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$ y A es alguna constante.

17. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. Considere un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

(a) Mostrar que, para todo vector unitario v es

$$(q - p) \cdot v = \int_b^a \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_b^a |\alpha'(t)| dt.$$

(b) Tomar $v = \frac{q-p}{|q-p|}$ y mostrar que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_b^a |\alpha'(t)| dt$$

y por lo tanto la curva con menor longitud de arco que une los puntos $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$ es la línea recta.

18. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

- (a) P contiene la recta tangente en s_0 .
- (b) Para todo entorno $I \subset \mathbb{R}$ de s_0 , existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P .

Probar que P es el plano osculador de α en s_0 .

19. Probar que bajo cualquiera de las siguientes condiciones, la curva en cuestión es plana:

- (a) Todos los planos osculadores en los distintos puntos de la curva pasan por un punto fijo.
- (b) Todos los planos osculadores son paralelos a un plano dado.