

# Geometría Proyectiva

## Práctica I - Curvas planas

1998 - Primer Cuatrimestre

1. Sea  $\alpha$  una curva que no pasa por el origen. Si  $\alpha(t_0)$  es el punto de su traza más próximo al origen y  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , entonces  $\alpha(t_0)$  y  $\alpha'(t_0)$  son vectores ortogonales.

2. La **lemniscata**. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función

$$\alpha(t) = \left( t \frac{1+t^2}{1+t^4}, t \frac{1-t^2}{1+t^4} \right).$$

Probar:

- (a)  $\alpha$  es diferenciable.
  - (b)  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ ; en este caso se dice que la curva es **regular**.
  - (c)  $\alpha$  es inyectiva; en este caso se dice que la curva es **simple**.
  - (d) Calcular los límites  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$ .
3. Un disco (circular) de radio 1 rueda en el plano  $xy$  sin resbalar sobre el eje  $x$ . La figura descrita por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama **cicloide**.
    - (a) Obtener una parametrización del cicloide. Determinar los puntos singulares.
    - (b) Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.
  4. Sea  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\frac{\theta}{2})))$$

La traza de  $\alpha$  es llamada **tractriz**. Probar que:

- (a)  $\alpha$  es una curva parametrizada diferenciable, regular salvo para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- (b) La longitud del segmento de la tangente de la tractriz entre el punto de tangencia y la intersección con el eje  $y$  es siempre 1.

5. Sea  $\alpha : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = \left( \frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$

Probar que:

- (a) Para  $t = 0$ ,  $\alpha$  es tangente al eje  $x$ .
- (b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = (0, 0)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$ .
- (c) Sea  $\beta$  la curva  $\alpha$  con la orientación opuesta. Ver que cuando  $t \rightarrow -1$  esta curva y su tangente se aproximan a la recta  $x + y + a = 0$ .

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta  $y = x$  se llama **Folio de Descartes**.

6. Considerar la curva  $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$  con  $a > 0$  y  $b < 0$  dos constantes.

- (a) Mostrar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = (0, 0)$  siguiendo una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces. Esta curva se llama **espiral logarítmica**.
- (b) Probar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$  y que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  es finito. Por lo tanto,  $\alpha$  tiene longitud de arco finita en  $[t_0, +\infty)$ .

7. Probar que si todas las normales a una curva parametrizada pasan por un punto fijo entonces la traza de la curva está contenida en un círculo.

8. Para una curva arbitraria

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$$

parametrizada por longitud de arco, considere la siguiente definición: llamando  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  a la tangente y  $\mathbf{n}(s)$  (la “normal” de  $\alpha$ ) al único vector unitario tal que  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  que induce la orientación usual del plano, la **curvatura** de  $\alpha$  es el único escalar  $\kappa(s)$  tal que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \quad (1)$$

Pruebe

- (a) La curvatura de  $\alpha$  es el área (con signo) del rectángulo definido por el par ordenado de vectores  $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}'\}$ , y halle una expresión explícita para  $\kappa(s)$  en función de  $\alpha_1(s)$ ,  $\alpha_2(s)$  y sus derivadas.
- (b)  $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \cdot \mathbf{t}(s)$ . En particular,  $\mathbf{t}'$  y  $\mathbf{n}'$  son ortogonales.
- (c) Las siguientes condiciones son equivalentes

- i.  $|\kappa(s)| \equiv 1/r, \quad r > 0.$
- ii.  $\alpha$  está contenida en una circunferencia de radio  $r$ .

*Observación: de la definición (1), tomando módulos se deduce la expresión conocida*

$$|\kappa(s)| = |\mathbf{t}'(s)| = |\alpha''(s)|.$$

9. De la expresión para la curvatura  $\kappa_\alpha$  de una curva  $\alpha$  parametrizada por longitud de arco obtenida en el ejercicio anterior

$$\kappa_\alpha(s) = (\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'')(s)$$

deduzca utilizando la regla de la cadena la expresión (para una curva arbitraria  $c(s)$  no necesariamente parametrizada por longitud de arco)

$$\kappa_c = \frac{c_1' c_2'' - c_2' c_1''}{[(c_1')^2 + (c_2')^2]^{3/2}}.$$

10. Dada una función diferenciable  $k(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , mostrar que la curva plana dada por

$$\alpha(s) = \left( \int \cos(\theta(s)) ds + a, \int \sin(\theta(s)) ds + b \right)$$

con  $\theta(s) = \int k(s) ds + \phi$ , tiene curvatura  $k$  y que está determinada unívocamente a menos de una traslación por el vector  $(a, b)$  y una rotación en el ángulo  $\phi$ .

11. Dada una curva plana en coordenadas polares por  $\rho = \rho(\theta)$ , para  $a \leq \theta \leq b$

- (a) Mostrar que la longitud de arco es:  $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$ , donde  $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ .
- (b) Mostrar que la curvatura es

$$k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

12. Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura nunca nula. Se llama **centro de curvatura de  $\alpha$  en  $s_0$**  a:

$$\beta(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} n(s_0)$$

y se llama **círculo osculador a  $\alpha$  en  $s_0$**  al círculo de centro  $\beta(s_0)$  y radio  $\rho(s_0) = |\kappa(s_0)|^{-1}$  que contiene a  $\alpha(s_0)$ . Probar que la curva  $\alpha$  y el círculo

osculador a  $\alpha$  en  $s_0$  tienen contacto de segundo orden. En particular ambos tienen la misma tangente.

13. Hallar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

14. Dada  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , la curva  $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  del ejercicio 12 se denomina **evoluta** de la curva  $\alpha$ . Recíprocamente, la curva  $\alpha$  es la **evolvente** de  $\beta$ . Probar:

- (a) Las normales a la evolvente son las tangentes a la evoluta.
- (b) La longitud de arco de la evoluta entre dos puntos es igual al valor absoluto de la diferencia entre los correspondientes radios de curvatura (suponiendo que  $\rho'$  no se anula en el arco en cuestión).

*Observación: de aquí se deduce que dada una curva cualquiera, su evolvente se construye tomando un hilo inextensible atado por un extremo a la curva en cuestión, y moviendo el otro extremo del hilo de manera que siempre sea tangente a la curva original.*