

Geometría Diferencial 2011

Segundo Parcial - 7/7/11

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Consideremos en \mathbb{R}^2 los 2-tensores ω_1 y ω_2 dados por

$$\omega_1 = dx \otimes dy + dy \otimes dx$$

$$\omega_2 = \sin 2\theta dr \otimes dr + r \cos 2\theta dr \otimes d\theta - r \cos 2\theta d\theta \otimes dr - r^2 \sin 2\theta d\theta \otimes d\theta$$

donde el primero esta dado en la carta usual y el segundo en coordenadas polares. Decidir si $\omega_1 = \omega_2$. Justifique su respuesta.

2. Sea M una variedad Riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave.

- a) Demuestre que existe un campo suave X_f tal que para todo campo Y se tiene que

$$Y(f)(p) = \langle Y(p), X_f(p) \rangle_p$$

- b) Si $\sigma(t) : (-R, R) \rightarrow M$ es una curva integral para el campo X_f demuestre que la función $f(\sigma(t))$ es no decreciente en t .

3. Sea $T = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ el toro, equipado con la estructura diferenciable usual (aquella que hace a la inclusión $i : T \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión). Sea $\omega = (x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$.

- a) Calcular la siguiente integral

$$\int_T i^*(\omega)$$

- b) Calcular $d\omega$.

4. Sean $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$ y $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1 < z < 1\}$ y consideremos $T : \mathbb{S}^2 \rightarrow C$ la proyección “hacia afuera”, mas precisamente

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Si en C y \mathbb{S}^2 consideramos las estructuras Riemannianas heredadas de \mathbb{R}^3 , probar que T preserva areas.