

Geometría Diferencial 2011

Práctica 3

1. Probar que si M y N son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.
2. Sea $i : S \rightarrow M$ subvariedad y *propia*, es decir, la preimagen de compactos es compacto. Probar que i es una inmersión. Concluir que si $i : S \rightarrow M$ es subvariedad y S es compacta entonces i es inmersión.
3. Sean M y N variedades de dimensión d y sea $f : M \rightarrow N$ regular. Probar que f es un homeomorfismo local.
4. Sean M y N variedades de dimensión d , con M compacta, y sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable.
 - a) Probar que si $p \in N$ es valor regular, entonces $f^{-1}(p)$ es un conjunto finito.
 - b) Probar que la asignación $p \mapsto \#f^{-1}(p)$ es localmente constante (donde p recorre valores regulares de f).
5.
 - a) Sea (U, ϕ_N) la carta de S^2 dada por la proyección estereográfica. Probar que un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ define una función diferenciable $f_P : S^2 \rightarrow S^2$ cuya expresión local $\phi_N \circ f_P \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se identifica con P .
 - b) Probar el teorema fundamental del álgebra.
6. Sea M una variedad de dimensión d , $p \in U \subset M$, U abierto, y $\phi_1, \dots, \phi_d : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $d_p\phi_1, \dots, d_p\phi_d$ son linealmente independientes. Probar que las funciones $\{\phi_i\}$ determinan una carta de M en un entorno de p .
7.
 - a) Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable, $\dim M \leq \dim N$. Sea $p \in M$ punto regular, y sea (U, ϕ) carta de N con $f(p) \in U$. Probar que un subconjunto de las funciones $\{\phi_i \circ f\}$ determina una carta de M en un entorno de p .
 - b) Sea $S \subset N$ subvariedad inmersa (la inclusión es una inmersión) y sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable satisfaciendo $f(M) \subset S$. Probar que $f : M \rightarrow S$ es diferenciable.
8. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable y sea S una subvariedad inmersa de N tales que para todo $p \in f^{-1}(S)$ vale $d_p f(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$. Probar que $f^{-1}(S)$ es una subvariedad inmersa de M de dimensión $\dim M - \dim N + \dim S$.
9. Dos subvariedades inmersas S_1, S_2 de M son *transversales*, y lo notamos $S_1 \pitchfork S_2$, si para todo $p \in S_1 \cap S_2$ vale $T_p S_1 \cap T_p S_2 = \{0\}$ ó $T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$. Probar que si $S_1 \pitchfork S_2$, entonces $S_1 \cap S_2$ es una subvariedad inmersa de M . Probar además que si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $\dim S_1 \cap S_2 = \max(\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M, 0)$.