

Geometría Diferencial 2009

Práctica 7 - Teorema de Frobenius

1. Para una variedad M de dimensión d , notamos $\Omega^*(M) = \bigoplus_{i=0}^d \Omega^i(M)$. Sea D una distribución de k -planos sobre M y $\mathcal{I}(D) = \{\omega \in \Omega^*(M) \mid \omega|_D = 0\}$ el anulador de D .
 - a) Probar que $\mathcal{I}(D)$ es un ideal de $\Omega^*(M)$
 - b) Probar que para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U y 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_{d-k}$ tales que $\mathcal{I}(D)|_U = \langle \omega_1, \dots, \omega_{d-k} \rangle$.
 - c) Recíprocamente si $I \subseteq \Omega^*(M)$ es un ideal localmente generado por $d-k$ 1-formas l.i. entonces existe una única distribución D de dimensión k tal que $I = \mathcal{I}(D)$
 - d) Probar que D es involutiva si y sólo si $\omega \in \mathcal{I}(D) \Rightarrow d\omega \in \mathcal{I}(D)$.
2. Sea I un ideal de formas diferenciales localmente generado por r 1-formas l.i. Probar que son equivalentes:
 - a) I es diferencial.
 - b) Si $\omega_1, \dots, \omega_r$ son generadores de I en un abierto $U \subseteq M$, entonces existen formas $\omega_{ij} \in \Omega^1(M)$ tales que $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$.
 - c) Si $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$, entonces existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $d\omega = \alpha \wedge \omega$.
3. Si D es una distribución (no necesariamente involutiva) un campo X se dice campo característico de D si $X \in D$ y para todo $Y \in D$ se tiene $[X, Y] \in D$. Probar que X es un campo característico de D si y sólo si para todo $\omega \in \mathcal{I}(D)$ se tiene que $i(X)(\omega) = 0$ y $i(X)(d\omega) \in \mathcal{I}(D)$.
4. Dada una distribución D de dimensión k se define, para cada $p \in M$, $\Delta_p \subseteq T_p M$ como el subespacio generado por los campos característicos de D . Supongamos que $\dim \Delta_p = l$, $\forall p \in M$.
 - a) Probar que Δ es una distribución involutiva (una subvariedad integral maximal de Δ se llama *Variedad característica* de D).
 - b) Sea (U, φ) una carta adaptada a Δ . Probar que en esa carta todo $\omega \in \mathcal{I}(D)$ se escribe como

$$\sum_{i=l+1}^d f_i(x_{l+1}, \dots, x_d) dx_i.$$

Y que Δ es maximal con esta propiedad.

5. Sea D una distribución involutiva de dimensión k sobre M y sea $\iota : P \rightarrow M$ una subvariedad integral de D . Supongamos que se tiene una función diferenciable $f : N \rightarrow M$ que se factoriza a través de P . Probar que la (única) función $g : N \rightarrow P$ tal que $\iota \circ g = f$ es necesariamente diferenciable.
6. Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie (i.e.: el conjunto de campos invariantes a izquierda, que identificamos con $T_e G$). Probar que existe una correspondencia biyectiva entre:
 - a) Sub-álgebras de Lie, es decir subespacios vectoriales $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ cerrados por corchete.
 - b) Subvariedades regulares $\iota : S \rightarrow G$ conexas tales que $\iota(S) \subset G$ es un subgrupo.
7. Probar que el gráfico de una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es variedad integral del ideal de formas $I \subseteq \Omega^*(M \times N)$ generado por $\{p_1^* f^*(\omega) - p_2^*(\omega) : \omega \in \Omega^1(N)\}$.
8. Sean M y N variedades, supongamos que existen 1-formas en M , $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ tales que para todo $p \in M$ $\{\omega_1(p), \dots, \omega_d(p)\}$ es una base de $T_p^* M$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 1-formas en N . Supongamos que el ideal de formas en $N \times M$ generado por $\{p_1^*(\alpha_i) - p_2^*(\omega_i) : i = 1, \dots, d\}$ es diferencial. Probar que, dado $q \in N$ y $p \in M$ existe un entorno U de q y una función diferenciable $f : U \rightarrow M$ tal que $f(q) = p$ y que $f^*(\omega_i) = \alpha_i|_U$.