

# Geometría Diferencial 2009

---

## Práctica 6 - Integración

1. Probar que si  $\alpha$  y  $\beta$  son formas diferenciales cerradas, entonces  $\alpha \wedge \beta$  es cerrada. Probar además que si  $\alpha$  o  $\beta$  es exacta, entonces  $\alpha \wedge \beta$  también lo es.
2. Probar que si  $f : M \rightarrow N$  es diferenciable y  $\omega \in \Omega^k(N)$  es cerrada (resp. exacta), entonces  $f^*\omega$  es cerrada (resp. exacta).
3. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada  $M$  cumple las siguientes propiedades:
  - a) Si  $-M$  denota la variedad con la orientación opuesta, entonces  $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$ .
  - b)  $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_M \omega_1 + b \int_M \omega_2$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - c) Si  $\omega$  es una  $n$ -forma continua y positiva entonces  $\int_M \omega \geq 0$  y la igualdad se da sólo si  $\omega = 0$ .
  - d) Si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo y  $\omega$  es una forma integrable en  $N$ , entonces  $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$ , donde el signo depende de si  $f$  preserva o invierte la orientación.
4. Sea  $\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ . Probar que  $\alpha$  es una 1-forma cerrada en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Calcular la integral de  $\alpha$  sobre  $S^1$ . Concluir que  $\alpha$  no es exacta. Concluir que  $i^*\alpha$  no es exacta, donde  $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la inmersión canónica.
5. Sea  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\omega(x) = \sum_i \frac{(-1)^n}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$ .
  - a) Probar que  $\omega$  es cerrada pero no exacta.
  - b) Calcular  $\int_{S^{n-1}} \omega$ .
  - c) Calcular la integral de  $\omega$  sobre el elipsoide  $\{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$ .
6. Sea  $M$  variedad diferenciable y sea  $\omega \in \Omega^k(M)$  una forma cerrada. Probar que
  - a) Si  $S$  es subvariedad de  $M$  compacta, sin borde y orientada de dimensión  $k$  tal que  $S = \partial W$  para alguna subvariedad  $W$  de  $M$ , entonces  $\int_S \omega = 0$ .
  - b) Si  $W$  es subvariedad de dimensión  $k+1$  con borde  $\partial W = S \sqcup T$  donde  $S$  y  $T$  son subvariedades de dimensión  $k$  orientadas, entonces  $\int_S \omega = -\int_T \omega$ .
7. Probar que si  $M$  es compacta, orientable y sin borde de dimensión  $n$ , entonces una  $n$ -forma nunca nula no es exacta.
8. Sea  $C$  una curva  $\mathcal{C}^1$  en una variedad  $M$ , parametrizada por  $\Gamma : [a, b] \rightarrow M$ . Si  $\omega$  es una 1-forma en  $M$ , definimos la integral de línea de  $\omega$  a lo largo de  $C$  por  $\int_C \omega := \int_{[a,b]} \Gamma^*\omega$ .

- a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida.
- b) Si  $\omega = df$  con  $f \in \Omega^0(M)$  y la curva  $C$  recorre del punto  $p$  al punto  $q$ , entonces  $\int_C \omega = f(q) - f(p)$ . En particular, la integral es independiente de la curva elegida entre  $p$  y  $q$ .
9. Probar que el toro  $T$  no es difeomorfo a la esfera  $S^2$ .  
*Sugerencia: hallar una 2-forma en  $S^2$  cerrada que no sea exacta; ver que toda 2-forma en  $T$  cerrada es exacta.*
10. Sea  $M$  variedad riemanniana orientada. Se define la  $n$ -forma *de volumen*  $V$  como la única que cumple  $V_p(v_1, \dots, v_n) = 1$  para toda base ortonormal orientada de  $T_p M$ . En coordenadas locales  $(U, \phi)$ , se tiene  $(\phi^{-1})^*(V) = \sqrt{g} dx_1 \dots dx_n$ , donde  $g = \det(g_{ij})$ .
- a) Calcular la matriz  $(g_{ij})$  para  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  en coordenadas polares y cilíndricas.
- b) Calcular la matriz  $(g_{ij})$  y la forma de volumen para  $S^1$  y  $S^2$ , y calcular los respectivos volúmenes.
11. Sea  $\omega$  la forma de volumen de una variedad riemanniana orientada  $M$  de dimensión  $n$ . Sean  $X_1, \dots, X_n$  y  $Y_1, \dots, Y_n$  campos de vectores en  $M$ . Probar que

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \cdot \omega(Y_1, \dots, Y_n) = \det\{\langle X_i, Y_j \rangle\}.$$

Probar también que

$$\omega(X_1, \dots, X_n)\omega = \tilde{X}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{X}_n$$

donde  $\tilde{X}_i$  es la 1-forma dual (vía la estructura riemanniana) al campo  $X_i$ .

12. Dada  $M$  variedad de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  una inmersión, se da a  $M$  la estructura riemanniana inducida, es decir para  $p \in M$  y  $v, w \in T_p M$  vale  $\langle v, w \rangle_p := \langle df(v), df(w) \rangle_{f(p)}$ .

Supongamos que  $M$  es orientada, y que  $\eta$  es el campo de vectores normales unitarios en  $f(M)$  que dan la orientación. Probar que la forma de volumen en  $M$  es dada por

$$\omega = f^*(i(\eta)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1})).$$