

Geometría Diferencial 2009

Práctica 4 - Campos de vectores

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p M$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X(p) = v$.
2. Sea $p \in M$, X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, ϕ) , con U incluido en el dominio de X , tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$.
3. Sea $p \in M$, X_1, \dots, X_k campos definidos en un entorno de p tales que los vectores $X_1(p), \dots, X_k(p)$ son l.i. en $T_p M$. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i. para todo $q \in U$.
4. Probar que un campo X en M define una derivación en $\mathcal{D}(M)$ via $f \mapsto X(f)$, donde $(X(f))(p) := X(p)(f_p)$ con f_p el germen de f en p . Probar que de este modo se tiene una biyección entre $\Gamma(TM)$ y las derivaciones de $\mathcal{D}(M)$.
5. Sean X, Y campos en M , vistos como derivaciones $X, Y : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$. Mostrar con un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación. Probar que $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ siempre lo es.
6. Sea (U, ϕ) una carta de M . Probar que $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0 \ \forall i, j$.
7. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando $T_p M$ con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0), (x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.
8. Dados X, Y campos en \mathbb{R}^n , hallar una fórmula general para el conmutador $[X, Y]$.
9. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X] \ \forall X, Y \in V$;

Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ \forall X, Y, Z \in V$.

Probar que $\Gamma(TM)$ es un álgebra de Lie.

10. Sea G un grupo de Lie. Para $g \in G$, notamos $L_g : G \rightarrow G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Sea $X \in \Gamma(TG)$ un campo. Decimos que es *invariante a izquierda* si $\forall g, h \in G$ se tiene $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$. Es decir, si $(dL_g)X = XL_g$.
 - a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo G .

- b) Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.
 - c) Deducir que hay un isomorfismo entre $T_e(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.
- 11. Una variedad M es *paralelizable* si existen campos X_1, \dots, X_m tales que para todo $p \in M$ el conjunto $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$ es una base de $T_p M$.
 - a) Probar que S^1 y S^3 son paralelizables;
 - b) Probar que el toro T^n es paralelizable;
 - c) Más en general, probar que todo grupo de Lie es paralelizable.
- 12. Probar que si M es paralelizable, entonces TM es difeomorfa a $M \times \mathbb{R}^d$. Mostrar con un ejemplo que no necesariamente estas dos variedades son difeomorfas. Concluir que no toda variedad es paralelizable.
- 13. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable. Un par de campos $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = (df)(X(p))$ para todo $p \in M$, es decir, si $Yf = (df)X$. Notamos $X \sim_f Y$.
 - a) Probar que si γ es una curva integral de X entonces $f\gamma$ es una curva integral de Y .
 - b) Probar que si $X_1 \sim_f Y_1$ y $X_2 \sim_f Y_2$ entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.
 - c) Probar que $X \sim_f Y$ si y solo si (para todo abierto $U \subseteq N$ y toda $g \in \mathcal{D}(U)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(U)$), si y solo si (para toda $g \in \mathcal{D}(N)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(N)$).
- 14. Sea γ una curva integral de un campo X definido sobre M . Probar que si $\dot{\gamma}(t) = 0$ para algún t , entonces γ es constante.
- 15. Probar que si M es compacta y $X \in \Gamma(TM)$, entonces X es completo.