

# Geometría Diferencial 2009

---

## Práctica 1 - Variedades y funciones diferenciables

1. Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $\dim(M) = d$ , y sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$ .
  - a) Probar que si  $V \subset U$  es un abierto, entonces  $(V, \phi|_V)$  es una carta compatible de  $M$ .
  - b) Probar que si  $f : \phi(U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^d$  es un difeomorfismo, entonces  $(U, f \circ \phi)$  es una carta compatible de  $M$ .
2. Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $d$ .
  - a) Probar que  $M$  admite un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$  tal que  $\phi_i(U_i)$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d \forall i$ .
  - b) Probar que  $M$  admite un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$  con  $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^d \forall i$ .
3. Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $U \subset M$  abierto. Probar que  $U$  hereda una estructura de variedad, y que la inclusión  $U \rightarrow M$  es diferenciable para esa estructura. Probar que  $\dim(U) = \dim(M)$ .
4. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciales. Probar que el producto cartesiano  $M \times N$  es naturalmente una variedad, y que las proyecciones  $M \times N \rightarrow M$  y  $M \times N \rightarrow N$  son diferenciables. Probar que  $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$ .
5. Sea  $M$  una variedad diferenciable, y sea  $\sim$  una relación de equivalencia definida sobre los puntos de  $M$  que satisface la siguiente condición:
  - i) dado  $p \in M$  existe un abierto  $U$ ,  $p \in U$ , tal que  $x \sim y \forall x, y \in U, x \neq y$ .Probar que el conjunto de clases de equivalencia  $M/\sim$  es una variedad diferenciable, y que la proyección  $M \rightarrow M/\sim$  es diferenciable. Probar que  $\dim(M) = \dim(M/\sim)$ .
6. Sean  $M$  y  $\sim$  como en el ejercicio anterior. Probar que si  $\sim$  también satisface
  - ii) dados  $p, q \in M$  tales que  $p \sim q$ , existen abiertos  $U, V$ ,  $p \in U \subset M$ ,  $q \in V \subset M$ , tales que  $x \sim y \forall x \in U, y \in V$ .entonces  $M/\sim$  es T2, y que si  $M$  es N2 entonces  $M/\sim$  también lo es.
7. Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, sea  $a \in \mathbb{R}$  fijo, y sea  $M = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = a, \text{ y } D_p F \neq 0\}$ . Probar que  $M$  es una variedad diferenciable, con las cartas dadas por el teorema de la función implícita. Probar que la inclusión  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable, y que  $\dim(M) = n - 1$ .

8. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $d$  y exhibir un atlas en cada caso.
- a)  $V$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $d = \dim V$ ;
  - b)  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d = n$ ;
  - c)  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$ , donde  $x \sim y$  si  $x = \pm y$ ,  $d = n$ ;
  - d)  $T_n = S^1 \times \dots \times S^1$ ,  $d = n$ ;
  - e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $d = 2$ ;
  - f)  $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ ,  $d = n^2$ ;
  - g)  $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ ,  $d = n^2 - 1$ ;
  - h)  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^t = 1\}$ ,  $d = n(n-1)/2$ .
9. Sea  $M = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$ , donde  $0' \notin \mathbb{R}^n$ . Se consideran dos cartas sobre  $M$ : una es  $(id, \mathbb{R}^n)$ ; la otra es  $(\phi, U)$ , donde  $U = M - \{0'\}$ ,  $\phi(p) = p$  si  $p \neq 0'$  y  $\phi(0') = 0$ . Probar que  $\mathcal{A} = \{(id, \mathbb{R}^n), (\phi, U)\}$  es un atlas para  $M$ , pero que  $M$  no resulta una variedad T2 con esta estructura.
10. Considerar en  $\mathbb{R}$  las siguientes cartas:  $(\mathbb{R}, id)$ ; y  $(\mathbb{R}, \varphi)$ ,  $\varphi(x) = x^3$ . Probar que las dos cartas no son compatibles, pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.
11. Sea  $M$  la imagen de la función  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ , junto con la estructura inducida por la carta de  $(M, f^{-1})$ . Probar que la función  $F : M \rightarrow M$ , definida por  $F(x, y) = (x, -y)$  no es diferenciable.
12. Probar que  $\mathcal{D}(M, \mathbb{R}) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$  es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si  $g : M \rightarrow N$  es diferenciable, entonces  $g^* : \mathcal{D}(N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(M, \mathbb{R})$  es un morfismo de anillos.
13. Sea  $p \in M$ . Probar que el conjunto de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de  $p$ ,  $\mathcal{D}_p(M)$ , es un anillo. Probar que si  $g : M \rightarrow N$  es diferenciable, entonces  $g^* : \mathcal{D}_{g(p)}(N) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$  es un morfismo de anillos.
14. Sea  $p \in M$ ; probar que la aplicación cociente  $f \mapsto \bar{f}$  da un morfismo de anillos  $\mathcal{D}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ .