

Geometría Diferencial - Práctica VIII

1. Sean $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección usual de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $E(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ el campo de Euler, y para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la aplicación de multiplicación por λ . Sea $\omega \in \Omega^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ una p -forma en el espacio proyectivo, y sea $\eta = \pi^*(\omega)$.

- (a) Probar que la contracción de η con el campo de Euler es la forma nula, esto es, $i_E(\eta) = 0$.
 (b) Probar que $L_\lambda^*(\eta) = \eta$.

Consideremos ahora una p -forma $\eta \in \Omega^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ que verifica (a) y (b). Probar que η induce una p -forma $\omega \in \Omega^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ tal que $\pi^*\omega = \eta$. En tal caso decimos que la p -forma η desciende a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

(Sugerencia: definir $\omega(\pi(x))(v_1 + x\mathbb{R}, \dots, v_p + x\mathbb{R}) = \eta(x)(v_1, \dots, v_p)$, donde hacemos la identificación $T\mathbb{P}^n(\mathbb{R})(\pi(x)) \simeq \mathbb{R}^{n+1}/x\mathbb{R}$.)

2. Usar el ejercicio anterior para probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si n es impar, probando que la n -forma $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ definida por

$$\eta(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{\|x\|^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

desciende a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y es nunca nula.

Observación: la n -forma η se identifica con el campo de covectores multilineales alternados definido por

$$\eta(x_0, \dots, x_n)(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\|x\|^{n+1}} \det \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ - & v_1 & - \\ \dots & \dots & \dots \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$$

3. Sea $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Probar que $i^*(\eta)$ define una n -forma en S^n nunca nula (η la n -forma del ejercicio anterior), con lo cual S^n es orientable.
4. Ahora pruebe que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ no es orientable si n es par. Proceda de la siguiente manera:
- Si $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable, y $\omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ es la n -forma que define la orientación, entonces $\pi^*(\omega)$ es una n -forma en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nunca nula.
 - Por el ejercicio anterior, $\theta = i^*(\pi^*(\omega))$ es una n -forma en S^n nunca nula, por lo que $\theta(x) = f(x)V(x)$, donde V es la n -forma que define la orientación en S^n y $f \in C^\infty(S^n)$ (por ejemplo, V puede ser $i^*(\eta)$, con η la n -forma del ejercicio 2).
 - Como $L_\lambda^*(\pi^*(\omega)) = \pi^*(\omega)$, deducir que $(L_{-1})^*(\theta) = \theta$, y por lo tanto $f(x) = (-1)^{n+1}f(-x)$ para todo $x \in S^n$.
 - Deducir entonces que, si n es par, θ es nula en algún punto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ no es orientable si n es par.