

Geometría Diferencial - Práctica VI

1. Operadores de contracción.

- (a) Probar que para cada par de valores
- i, j
- ,
- $1 \leq i \leq p$
- ,
- $1 \leq j \leq q$
- existe una aplicación

$$c_j^i : T^{p,q}(V) \rightarrow T^{p-1,q-1}(V)$$

que en los tensores elementales vale

$$c_j^i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q) = \varphi_j(v_i)v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_i \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi}_j \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

- (b) Mas generalmente si
- $I = (i_1, \dots, i_n)$
- y
- $J = (j_1, \dots, j_n)$
- son dos sucesiones de
- n
- índices distintos de
- $\{1, \dots, p\}$
- y
- $\{1, \dots, q\}$
- respectivamente, existe una contracción

$$c_J^I : T^{p,q}(V) \rightarrow T^{p-n,q-n}(V)$$

que en un tensor elemental $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q$ vale

$$\prod_{\alpha=1}^n \varphi_{j_\alpha}(v_{i_\alpha})v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{v}_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

- (c) Si $p = q = n$ y $I = J = (1, \dots, n)$, la contracción de (b) permite identificar $(V^*)^{\otimes n}$ con $(V^{\otimes n})^*$.
- (d) Sea $\alpha : V \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}_K(V, V)$ definida en tensores elementales por $\alpha(v \otimes \varphi)(u) = \varphi(u)v$. Sea $c_1^1 : V \otimes V^* \rightarrow K$ el operador de contracción, y sea $\text{tr} : \text{Hom}_K(V, V) \rightarrow K$ el operador traza. Probar que $\text{tr} \circ \alpha = c_1^1$.

2. Realización de $\wedge^n V$ y $S^n V$ como subespacios de $T^n V$.

Si la característica de K es cero, podemos definir las aplicaciones

$$\mathcal{A} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$$

por

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sg}(\sigma) t \cdot \sigma \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} t \cdot \sigma$$

Probar

- (a) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$.
- (b) La imagen de \mathcal{A} es el conjunto de tensores antisimétricos, y la imagen de \mathcal{S} el conjunto de tensores simétricos.
- (c) La restricción de $\pi : V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$ a $\text{im } \mathcal{S}$ es un isomorfismo entre $\text{im } \mathcal{S}$ y $S^n V$. Similarmente, dar un isomorfismo entre $\text{im } \mathcal{A}$ y $\wedge^n V$.

3. El dual de $\wedge^n V$. Probar que la aplicación bilineal simétrica

$$\wedge^n(V^*) \times \wedge^n V \rightarrow K$$

definida por

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sg}(\sigma) \varphi_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \varphi_{\sigma(n)}(v_n) = \det(\varphi_j(v_i))$$

induce un isomorfismo entre $\wedge^n(V^*)$ y $(\wedge^n V)^*$.

4. Sea $f : V \rightarrow U$ una transformación lineal, y sean $\{v_1, \dots, v_r\}$ y $\{u_1, \dots, u_s\}$ bases de V y U respectivamente. Encontrar las matrices de $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \rightarrow U^{\otimes n}$, $S^n f : S^n V \rightarrow S^n U$ y $\wedge^n f : \wedge^n V \rightarrow \wedge^n U$ en las bases inducidas por $\{v_1, \dots, v_r\}$ y $\{u_1, \dots, u_s\}$.

5. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Probar que

$$\det(t \cdot \text{id}_V + f) = \sum_{j=0}^n \text{tr}(\wedge^j f) \cdot t^{n-j}$$

6. Sean $B = \{v_1, \dots, v_r\}$ y $B' = \{u_1, \dots, u_r\}$ dos bases de V . Sea $C = C_{BB'}$ la matriz de cambio de base (que toma las coordenadas de un vector en base B y devuelve las coordenadas del mismo vector en la base B').

Describir la matriz de cambio de base para $V^{\otimes n}$, $S^n V$, $\wedge^n V$.

Sean además $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ las bases duales de B y B' respectivamente. Calcular la matriz de cambio de base para $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$.

7. Exhibir isomorfismos

$$S^n(U \oplus V) \cong \bigoplus_{i=0}^n S^i(U) \otimes S^{n-i}(V) \quad \text{y} \quad \wedge^n(U \oplus V) \cong \bigoplus_{i=0}^n \wedge^i(U) \otimes \wedge^{n-i}(V)$$