

# Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

---

## Práctica 8 - Automorfismos

1. a) Sea  $f$  un automorfismo de  $B(0,1)$  tal que  $f(0) = 0$ . Probar que existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $f(z) = e^{i\theta}z$  para todo  $z$  en  $B(0,1)$ .  
b) Probar que  $f : B(0,1) \rightarrow B(0,1)$  es automorfismo si y sólo si existen  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in B(0,1)$  tales que para todo  $z$  en  $B(0,1)$ ,

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}.$$

2. a) Sea  $\mathbb{P} = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$  el *semiplano de Poincaré*. Probar que  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  es automorfismo si y sólo si existen  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{R}$  con  $ad - bc > 0$  tales que para todo  $z$  en  $\mathbb{P}$ ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?
3. Sean  $\Omega$  un abierto simplemente conexo del plano,  $f$  y  $g$  dos automorfismos de  $\Omega$  y  $a$  y  $b$  dos puntos distintos de  $\Omega$ . Si  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$ , probar que  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$  en  $\Omega$ .
4. Sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo del plano, y sean  $a$  y  $b$  dos puntos distintos de  $\Omega$ . Probar que existe un automorfismo  $f$  de  $\Omega$  tal que  $f(a) = b$ .
5. Caracterizar los automorfismos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
(*Sugerencia:* estudiar la restricción de un tal automorfismo a  $\mathbb{C}$ .)
6. Caracterizar los automorfismos de  $\mathbb{C}^*$ .  
(*Sugerencia:* estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)
7. Dar fórmulas para los automorfismos de:

a)  $\{\operatorname{Im}(z) > 0\} \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$

b)  $\{0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$

## Opcional: Fórmula de Schwarz-Christoffel

8. Probar que la función  $W(z) = \int_{z_0}^z \frac{(1-w^n)^{2/n}}{w^2} dw$ , donde  $z_0$  es un punto arbitrario de la circunferencia de radio 1, define un homeomorfismo entre  $B(0, 1)$  y el interior de un  $n$ -ágono regular  $P$ , y que define un homeomorfismo entre  $\overline{B(0, 1)}$  y la clausura de  $P$ .
9. Sea  $F(z)$  una holomorfa nunca nula en un  $B(0, \varepsilon)$  y tal que  $\arg(F(z))$  toma un valor constante en el intervalo real  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Probar que la función

$$W(z) = \int_{z_0}^z \frac{F(w)}{w} dw$$

donde  $z_0$  es un punto arbitrario de  $B(0, \varepsilon) \cap \{Im(z) > 0\}$ , es holomorfa en  $\{0 < |z| < \varepsilon\} \cap \{Im(z) > 0\}$  y transforma los intervalos  $[-\varepsilon, 0]$  y  $[0, \varepsilon]$  en dos semirrectas paralelas con la misma dirección. La distancia entre estas semirrectas es igual a  $\pi|F(0)|$ .

10. a) Probar que la función  $F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w\sqrt{w-a}}$ , donde  $z_0$  es un punto arbitrario de  $\{Im(z) > 0\}$  y  $a > 0$ , transforma el semiplano  $\{Im(z) > 0\}$  en la media franja de ancho  $\pi/\sqrt{a}$  de la izquierda.
- b) Probar que la función  $G(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w(w-a)^{1/3}}$  transforma el semiplano  $\{Im(z) \geq 0\}$  en la región cerrada del medio.
- c) Probar que la función  $H(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w(w-a)^{1/2}(w-b)}$ , donde  $0 < a < b$ , transforma el semiplano  $\{Im(z) \geq 0\}$  en la región cerrada de la derecha. Determinar el ancho de las dos franjas que componen esta región.

