

# Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

---

## Práctica 7 - Sucesiones de funciones holomorfas

- $\mathcal{O}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\},$
  - $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  si  $f_n, f \in \mathcal{O}(\Omega)$  y además  $f_n \rightrightarrows f$  en  $K$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ .
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  es *acotado* si  $\forall K \subset \Omega$  compacto existe  $M_K$  tal que  $\|f\|_K \leq M_K$  para toda  $f \in \mathcal{A}$ .
1. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  y  $z_n \rightarrow z \in \Omega$ , entonces  $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$ .
  2. Sean  $f_n, g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$  tales que  $f_n \rightarrow f$  y  $g_n \rightarrow g$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Probar que  $f_n g_n \rightarrow fg$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
  3. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , entonces  $e^{f_n} \rightarrow e^f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
  4. Sea  $K \subset \Omega$  compacto. Si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $K$  y  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in K$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$   $f_n$  no se anula en  $K$  y además  $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$  uniformemente en  $K$ .
  5. Sea  $P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!}$ , y sea  $R > 0$ . Probar que  $P_n$  no tiene ceros reales de módulo menor que  $R$  para  $n$  suficientemente grande.
  6. Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada incluida en  $\Omega$  y  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  tal que  $f$  no se anula sobre  $\gamma$ . Si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , la cantidad de ceros de  $f_n$  en  $\text{Int}(\gamma)$  es igual a la cantidad de ceros de  $f$  en  $\text{Int}(\gamma)$ .
  7. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$  con  $f \not\equiv 0$ . Si existe  $a \in \Omega$  tal que  $f(a) = 0$ , probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  existe  $a_n \in \Omega$  de modo que  $a_n \rightarrow a$  y  $f_n(a_n) = 0$  para todo  $n \geq n_0$ .
  8. Probar que si  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{O}(\Omega)$ , entonces  $\{f_n\}$  es un conjunto acotado en  $\mathcal{O}(\Omega)$ .
  9. Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto acotado en  $\mathcal{O}(\Omega)$  y sea  $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$ . Probar que  $\mathcal{A}'$  es acotado.
  10. Probar que  $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}_{n \geq 1}$  converge a  $e^z$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ .
  11. **Función Gamma**

a) Probar que la función *gamma*, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

es holomorfa en  $\{\text{Re}(z) > 0\}$ .

b) Probar que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

c) Probar que  $\Gamma(1) = 1$  y que para todo  $z \in \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ ,  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .  
Deducir que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

## Sucesiones de funciones meromorfas

12. a) Demostrar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left( \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2.$$

*Sugerencia:*

- Observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$ , periódicas de período 1 y con polos de orden 2 en los todos los enteros.
- Verificar además, que en cada entero  $n$ , la parte singular de cada una de las funciones es  $\frac{1}{(z-n)^2}$ . Notar que, por lo tanto, la diferencia entre ambos miembros es una función cuyas únicas singularidades resultan evitables.
- Para finalizar, probar que esta diferencia es una función acotada.

b) Utilizando el ítem anterior, calcular los valores de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

13. Probar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi z).$$

14. Sea  $f(z)$  una función meromorfa con polos simples en los puntos  $a_1, \dots, a_n, \dots$ , con  $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Sea  $A_n$  el residuo de  $f(z)$  en cada polo  $a_n$ .

a) Probar que existe una sucesión  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$  y  $f$  no tiene singularidades sobre  $\{|z| = r_n\}$ .

b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{|w|=r_n\}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \rightarrow 0$ , probar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

(*Sugerencia:* calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|w|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$ .)