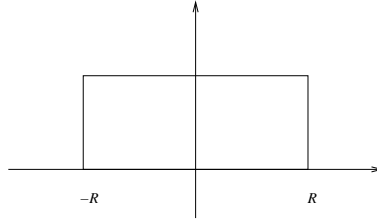


Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Ejercicios complementarios - Integrales reales

1. Dado $0 < a < 1$, calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$ integrando en el siguiente rectángulo de altura $2\pi i$:



2. a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Probar que si $zQ(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_i) > 0} \text{Res}(Q(z), z_i)$.

b) Calcular

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} dx$

3. a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales. Probar que si $zQ(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$, entonces v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_i) > 0} \text{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i)$.

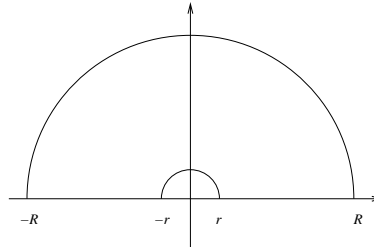
b) Calcular

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ ii) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$

4. a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales, excepto en el origen, donde tiene un polo simple. Probar que si $Q(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$, entonces

$$\int_{-R}^{-r} Q(x)e^{ix} dx + \int_r^R Q(x)e^{ix} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{R \rightarrow +\infty} 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_i) > 0} \text{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i) + \pi i \text{Res}(Q(z)e^{iz}, 0)$$

Sugerencia: integrar sobre curvas del siguiente tipo



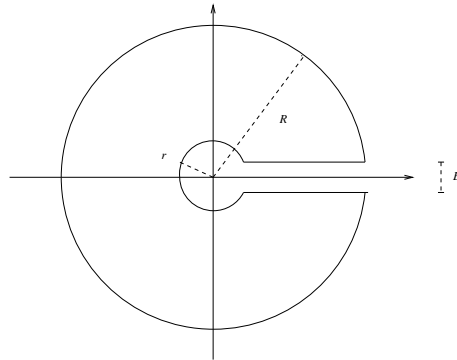
- b) Probar que $\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \pi i$ y deducir que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

5. Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, probar que la integral $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$ converge y calcularla.
Sugerencia: integrar sobre curvas como en el ejercicio anterior.
6. a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$ y sea $\alpha \in (0, 1)$.
 Probar que si $Q(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, entonces

$$(1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res} \left(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, z_i \right)$$

donde z^α denota la rama con argumento entre $(0, 2\pi)$.

Sugerencia: integrar sobre curvas del siguiente tipo, con $R \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$.



- b) Calcular
- i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$ ii) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$ iii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x} dx$
7. a) Sea $Q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional tal que el denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1. Sea $R : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por

$$R(z) = \frac{1}{z} Q \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right).$$

Probar que $\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \sin x) dx = 2\pi \sum_{|z_i| < 1} \text{Res}(R(z), z_i)$.

Sugerencia: integrar sobre la curva $z = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

- b) Calcular
- i) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin x} dx$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$;
 ii) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)^2} dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b < a$;
 iii) $\int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.