

Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Práctica 6 - Singularidades

1. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

- | | | |
|---------------------|-------------------|---------------------|
| i) $0 < z < 1$ | ii) $1 < z < 2$ | iii) $2 < z $ |
| iv) $0 < z-1 < 1$ | v) $1 < z-1 $ | vi) $1 < z-2 < 2$ |

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\frac{e^z}{z-1}$ en $\{|z| > 1\}$.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que si $0 < |z| < \infty$, entonces

$$e^{\frac{1}{2}\lambda(z+\frac{1}{z})} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

donde para $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\lambda \cos t} \cos(nt) dt$.

4. Determinar en cada caso qué tipo de singularidad tiene $f(z)$ en 0. Cuando sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0. Cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------|---|
| i) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ | ii) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ | iii) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$ |
| iv) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ | v) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$ | vi) $f(z) = \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ |
| vii) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$ | viii) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ | |

5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

6. Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Demostrar que si f tiene singularidades no evitables en i y en $2i$, entonces el desarrollo de Laurent de f en $\{1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. a) Probar que z_0 es un cero de orden k de f sii es un polo de orden k de $\frac{1}{f}$.
b) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y un cero (polo) de orden k de g , ¿qué clase de singularidad de $\frac{f}{g}$ es z_0 ?
c) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g , decidir que tipo de singularidad tienen fg y $\frac{f}{g}$ en z_0 .

8. Sea z_0 una singularidad evitable, polo o singularidad esencial de la función f . Determinar en cada caso qué tipo de singularidad tiene la función e^f en z_0 .
9. Sea $f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}$. De acuerdo con el grado de los polinomios, decidir que tipo de singularidad tiene f en ∞ .
10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\hat{\mathbb{C}}$.
- i) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ ii) $f(z) = \cos z e^{-\frac{1}{z^2}}$ iii) $f(z) = \frac{1}{z^3 - 5} + z e^{\frac{1}{z}}$
iv) $f(z) = \frac{z^5}{1 + z^4}$ v) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$ vi) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$
vii) $f(z) = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$ viii) $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$
11. Sea f una función entera. Probar que:
- a) f tiene una singularidad evitable en ∞ sii f es constante,
b) f tiene un polo de orden n en ∞ sii es f un polinomio de grado n .
12. Probar que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera y biyectiva, entonces existen dos números complejos a, b , con $a \neq 0$, tales que $f(z) = az + b$.

Cálculo de Residuos

13. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas en \mathbb{C} .

i) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ ii) $f(z) = \frac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$ iii) $f(z) = z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

14. a) Sea a un polo de orden m de f y sea $g(z) = (z - a)^m f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} g^{(m-1)}(z).$$

- b) Deducir que si a es un polo simple de f entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

15. Sea f meromorfa en un abierto Ω , g holomorfa en Ω y sea $a \in \Omega$. Probar que:

- a) a es polo simple de $f \Rightarrow \operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a)g(a)$;
b) a es cero de orden m de $f \Rightarrow a$ es polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m$;
c) a es polo de orden m de $f \Rightarrow a$ es polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m$;
d) a es cero de orden m de $f \Rightarrow a$ es polo simple de $\frac{f'g}{f}$ y $\operatorname{Res}\left(\frac{f'g}{f}, a\right) = mg(a)$.

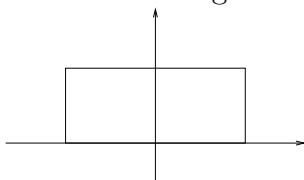
16. Calcular los siguientes residuos.

i) $\frac{e^z}{(z-1)z}$ en $z = 0, 1$ ii) $\frac{\cos z - 1}{\operatorname{sen} z - z}$ en $z = 0$ iii) $\frac{z^4 e^z}{1 + e^z}$ en $z = \pi i$

17. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcular

i) $\int_C \frac{z}{z^4+1} dz$ ii) $\int_C \frac{1+\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z} dz$ iii) $\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}$

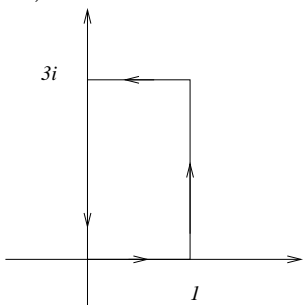
18. Sea f entera y γ una curva como en la figura



Si $\int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, probar que f no se anula en el interior de γ .

Teorema de Rouché y residuos en el infinito

19. Sea γ el rectángulo de vértices $0, 1, 1 + 3i$ y $3i$ recorrido en sentido positivo, y sea f meromorfa en \mathbb{C} tal que $f(z + 3i) = f(z)$ y $f(z + 1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre γ , la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ (contados con multiplicidad).



20. Probar que el polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1 y que el resto de las raíces están en $\{1 < |z| < 2\}$.

21. Probar que el polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1 = 0$ tiene una única raíz en $\{|z| < \frac{3}{2}\}$ y decidir si tiene alguna raíz en $\{|z| \geq 2\}$.

22. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Probar que la ecuación $z^n e^{\alpha-z} = 1$ tiene exactamente n raíces en $\{|z| < 1\}$.

23. Calcular los residuos en ∞ de las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$, (ii) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}$.

24. Sea C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcular

(i) $\int_C \frac{z^2+3z-1}{z^4-2} dz$, (ii) $\int_C \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{1-z^2} dz$.

Aplicaciones

25. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Se define en Ω la función $f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, tomando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que $\log(r) \in \mathbb{R}$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Calcular $\int_C f(z)dz$ siendo C la circunferencia $\{|z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.
26. Sea f holomorfa alrededor de z_0 . Probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y solo si $f'(z_0) \neq 0$.
27. Sea f holomorfa e inyectiva en la bola de centro a y radio R , $B(a, R)$. Sea $0 < r < R$ y sea γ el borde de la bola de centro a y radio r . Probar que para todo $w \in f(B(a, r))$,

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz.$$

28. Sea f holomorfa y no constante en $\Delta = \{|z| < r\}$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe un entorno Ω de 0 contenido en Δ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega) = \{|z| < s\}$ para algún s y $f(z) = g(z)^{\text{mult}(f,0)}$ para todo $z \in \Omega$.