

Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Ejercicios complementarios - Homografías

Llamamos *plano complejo ampliado* al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

1. Probar que el conjunto \mathcal{H} de las homografías es un grupo bajo la composición.
2. a) Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.
b) Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_i en w_i ($i = 2, 3, 4$).
3. Probar que toda homografía es composición de algunas de la siguiente lista:

$$I(z) = \frac{1}{z}, \quad H_a(z) = az, \quad a \in \mathbb{C}, a \neq 0, \quad T_b(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C}.$$

4. Una *circunferencia* de $\widehat{\mathbb{C}}$ es un subconjunto igual o bien a una circunferencia del plano complejo o bien a la unión de una recta del plano complejo junto con el punto del infinito. Probar que una homografía manda circunferencias en circunferencias.
5. a) Hallar homografías que transformen
 - 1) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;
 - 2) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{\operatorname{Re}(z) = 1\}$.
6. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0.

7. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ matrices no singulares que representan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.
 - a) ¿Qué homografía representa la matriz AB ?
 - b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1} ?
 - c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

8. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y sólo si se puede escribir con coeficientes reales.

9. Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) es

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una circunferencia si y sólo si su razón doble es un número real.

10. Sea C una circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C . Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C si $(z, z_2, z_3, z_4) = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

a) Probar que la definición anterior no depende de los puntos elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C .

b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C . A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de C* . Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C , la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C .

c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C , entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

11. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞ .

12. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.

13. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

14. Hallar homografías que transformen

a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i ;

b) el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\text{Im}(\alpha) > 0$).

15. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sean $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.