

Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Ejercicios complementarios - Ramas del logaritmo

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un abierto conexo. Llamamos *rama del logaritmo de z en Ω* a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.
 - a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω .
 - b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω . Demostrar que si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
 - c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω , entonces $S^1 \not\subset \Omega$.
2. Sean $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.
 - a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.
 - b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i , $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
 - c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
 - d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?
3. Sea \log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-t}{i+t} \right).$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n -ésima de z en Ω* a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.
 - a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de \sqrt{z} en Ω . Definirlas.
 - b) Probar que toda rama de \sqrt{z} es holomorfa.
 - c) Si Ω es conexo y f es una rama de \sqrt{z} en Ω , entonces f y $-f$ son todas las ramas.

5. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.
- a)* Demostrar que para toda rama g , $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω .
 - b)* Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω .
 - c)* Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el ítem (b).