

Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Práctica 3 - Series

1. Sea $S_1(X)$ la serie formal $\sum_{n \geq 0} X^n$, y sea $S_p(X) = (S_1(X))^p$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

a) Dados $p, n \in \mathbb{N}$, probar la siguiente identidad.

$$1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \dots + \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!}$$

b) Dado $p \in \mathbb{N}$, probar que el desarrollo de $S_p(X)$ es

$$S_p(X) = \sum_{n \geq 0} \binom{p+n-1}{n} X^n$$

2. a) Calcular los términos de grado ≤ 5 de la inversa composicional de la siguiente serie.

$$X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} X^{2p+1} + \dots$$

b) Calcular los términos de grado ≤ 5 de la inversa multiplicativa de la siguiente serie.

$$1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^4 + \dots + \frac{1}{p+1}X^{2p} + \dots$$

3. a) Definir el anillo $\mathbb{C}[[X, Y]]$ de series formales en dos variables, con coeficientes en \mathbb{C} .

b) Sea $\text{Exp}(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!}$. Demostrar la siguiente igualdad en $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

$$\text{Exp}(X + Y) = \text{Exp}(X) \cdot \text{Exp}(Y)$$

4. Denotemos $G = \sum_{n \geq 0} X^n = \frac{1}{1-X}$ y sea $L = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} X^n \in K[[X]]$.

a) Verificar que $L' = G$.

b) Demostrar que $\text{Exp} \circ L = G$.

c) Calcular el radio de convergencia de L .

5. Probar usando series formales las siguientes identidades de funciones complejas.

$$\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$$

$$\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$$

6. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ a_n = \frac{n+1}{2n+1} & \text{b)} \ a_n = \frac{n}{2n^2+3} & \text{c)} \ a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}} \\ \text{d)} \ a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) & \text{e)} \ a_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) & \end{array}$$

7. Sean $p, q > 0$. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$ converge si y sólo si o bien $p > 1$ o bien $p = 1$ y $q > 1$.

8. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n & \text{b)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n & \text{c)} \ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n \\ \text{d)} \ \sum_{n \geq 1} 4^{n^2} z^n & \text{e)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} z^{n^2} & \text{f)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n \end{array}$$

9. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Probar que si $\sum_{n \geq 1} M_n$ converge, entonces $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge uniformemente en X .

10. a) Sean $(a_n)_{n \geq 0}$, $(Z_n)_{n \geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que $(a_n Z_n)_{n \geq 0}$ converge. Probar que $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1}) Z_n$ converge si y sólo si $\sum_{n \geq 1} a_n (Z_n - Z_{n-1})$ converge.

b) **Criterio de Dedekind.** Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de números complejos. Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n \geq 1} z_n$ están acotadas, entonces $\sum_{n \geq 1} a_n z_n$ converge.

c) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge, entonces $\sum_{n \geq 1} a_n z_n$ converge.

d) **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum_{n \geq 1} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} r_n z_n$ converge.

11. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n & \text{b)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n & \text{c)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n \\ \text{d)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{4^n}{5^n} z^n & \text{e)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+2)^n} z^n & \text{f)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(2-i)^{n^2}} z^n \\ \text{g)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n & \text{h)} \ \sum_{n \geq 1} n! z^{n^2} & \text{i)} \ \sum_{n \geq 1} z^{n!} \\ \text{j)} \ \sum_{n \geq 1} \sin n \ z^n & \text{k)} \ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)} & \end{array}$$

12. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} & \text{b)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+|z|} & \text{c)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+|z|} \\ \text{d)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n} & \text{e)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{nz^n} & \text{f)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{nz}}{n^2} \\ \text{g)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{inz}}{n+1} & \text{h)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n & \text{i)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right)^n \end{array}$$

13. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ y $\sum_{n \geq 1} a_{m+n} z^n$ son iguales.

14. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n \geq 0} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

15. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad e^z \sen z & \text{b)} \quad \sen z \cos z & \text{c)} \quad \frac{e^z - 1}{z} \\ \text{d)} \quad \frac{e^z - \cos z}{z} & \text{e)} \quad \frac{1}{\cos z} & \text{f)} \quad \frac{\sen z}{\cos z} \end{array}$$

16. Dado $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$.

$$\text{Sugerencia: } f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$$

17. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

- f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
- f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

18. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

- a) Probar que $R(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.
- b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.
- c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.