

# Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

---

## Práctica 2 - Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Probar que  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a + ib$  si y sólo si  $\operatorname{Re}(f(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$  e  $\operatorname{Im}(f(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$ .

2. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Verificar que  $f$  es continua en 0 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

3. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de  $z = x + iy$ , y hallar  $f'(z)$  en cada caso.

a)  $f(z) = y + ix$

b)  $f(z) = \bar{z}$

c)  $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

d)  $f(z) = x^2 + iy^2$

e)  $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

f)  $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

g)  $f(z) = z^3 - 2z$

h)  $f(z) = z^2 \bar{z}$

i)  $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$

j)  $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

4. Una función  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de tipo  $\mathcal{C}^2$  es *armónica* si verifica  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . A su vez,  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una *conjugada armónica* de  $u$  si la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa.

a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son  $\mathcal{C}^2$ , entonces son armónicas. Deducir que si  $u$  es una función  $\mathcal{C}^2$  que admite una conjugada armónica, entonces  $u$  es armónica.

b) Probar que si  $v$  y  $\tilde{v}$  son conjugadas armónicas de  $u$ , entonces  $v$  y  $\tilde{v}$  difieren en una constante.

c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

i)  $u_1(x, y) = x^2 - y^2$     ii)  $u_2(x, y) = x^2 y^2$     iii)  $u_3(x, y) = 2x(1 - y)$

d) Probar que si  $v$  es conjugada armónica de  $u$ , las curvas de nivel de  $u$  y  $v$  se cortan de manera ortogonal.

5. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo.

a) Probar que dados  $z_0$  y  $z_1$  en  $\Omega$  existe una curva  $\gamma$ ,  $\mathcal{C}^1$  a trozos, tal que  $\gamma(0) = z_0$  y  $\gamma(1) = z_1$ .

b) Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f' \equiv 0$  en  $\Omega$ , probar que  $f$  es constante.

6. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Demostrar las siguientes afirmaciones.

- |   |   |
|---|---|
| a) $\operatorname{Re}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte | b) $\operatorname{Im}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte |
| c) $ f $ cte $\Rightarrow f$ cte                  | d) $\arg(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte              |
| d) $\overline{f}$ holomorfa $\Rightarrow f$ cte   |   |

7. Probar que si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y su imagen está contenida en la unión de finitas rectas, entonces  $f$  es constante.

8. Sea  $\Omega$  un abierto simétrico respecto del eje real y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Probar que la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$  es holomorfa.

9. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que verifican  $f'(0) = 1$  y  $f(x + iy) = e^x f(iy)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Sugerencia: definiendo  $c, s$  tales que  $f(iy) = c(y) + is(y)$ , probar que  $c' = -s$  y que  $s' = c$ .*

10. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$f(x + iy) = f(x) - f(y) + 2xyi.$$

11. **Regla de L'Hopital.** Sean  $f, g$  funciones holomorfas en  $z_0$  tales que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ . Probar que

$$\frac{f(z)}{g(z)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

*Sugerencia:  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$  con  $\eta(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ .*

12. Calcular:

- |  |   |
|--|---|
| (i) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1},$                                     | (ii) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i},$ |
| (iii) $\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z - e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3 + 1},$ | (iv) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$   |

13. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $\mathcal{C}^1$  y sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Mostrar que

$$f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

14. Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  las curvas  $\gamma_1(t) = t$  y  $\gamma_2(t) = (1 + i)t$ . Sea  $f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$ . Calcular qué ángulo forman las curvas  $f \circ \gamma_1$  y  $f \circ \gamma_2$  en  $t = 0$ .