

Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2008

Práctica 1 - Números complejos

1. Calcular la parte real e imaginaria de

$$(1+2i)^3, \quad \frac{5}{-3+4i}, \quad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2, \quad (1+i)^n + (1-i)^n,$$

$$(a+bi)^4, \quad \frac{1}{a+bi}, \quad \frac{a+bi-1}{a+bi+1}, \quad \frac{1}{(a+bi)^2}.$$

2. Calcular

$$\sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}, \quad \sqrt{1+i}, \quad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{-i}.$$

3. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, resolver la ecuación cuadrática $z^2 + \alpha z + \beta = 0$.

4. Probar que \mathbb{C} es isomorfo al conjunto de matrices reales de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

es decir, que existe una biyección que respeta la suma, el producto y la unidad.

5. Probar que \mathbb{C} es isomorfo al conjunto de polinomios reales módulo el polinomio irreducible $x^2 + 1$.

6. Dados $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, probar que $z^n = \alpha$ tiene exactamente n soluciones complejas.

7. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, probar que $1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.

8. Dado $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, probar que $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito o denso en S^1 .

9. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, simplificar las expresiones

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta, \quad 1 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta.$$

10. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b vale la siguiente identidad.

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Función exponencial

Extendiendo la función exponencial real, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define

$$e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

11. Demostrar que $e^{w+z} = e^w e^z$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Concluir que $e^{nz} = (e^z)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
12. Describir los z tales que $e^z = 1$.
13. Demostrar que si $e^z = e^w$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$. Concluir que la función exponencial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ tiene período $2\pi i$.
14. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.
15. Hallar $f(A)$, donde f es la función exponencial y
 - a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.
 - b) A es el primer cuadrante.
 - c) $A = \{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Funciones trigonométricas

16. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostrar que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Generalizando las igualdades de arriba se define para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

17. Comprobar que $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ y $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
18. Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π .
19. Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de \mathbb{C} en \mathbb{C} .
20. Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.
21. Probar que $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.
22. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.
23. Dados $a, b, b' \in \mathbb{R}$, probar que si $|b| < |b'|$ entonces $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|$.

Sucesiones

24. Sean $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$.

- a) Probar que $z_n \rightarrow z$ si y sólo si $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$.
- b) Probar que si $z_n \rightarrow z$ entonces $|z_n| \rightarrow |z|$. Dar un ejemplo en que no valga la recíproca.

25. a) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.

- b) Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^n) = \frac{1}{1 - \alpha}$.

26. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n, \quad n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n, \quad \cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n^2}, \quad \left(\frac{(-1)^n + 1}{3} \right)^n, \quad n i^{2n+1}.$$

27. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto \mathcal{M} de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.