

ALGEBRA II - PRACTICA 6

1er. cuatrimestre 1995

- 1) \mathbb{Z}_n es un anillo semisimple si y solo si n es libre de cuadrados.
- 2) a) Sea $G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{d_i}$ con $d_i | d_{i+1}$. Hallar condiciones sobre los d_i para que G sea un \mathbb{Z} -modulo semisimple.
b) Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K . Sea $\sigma : V \rightarrow V$ un morfismo K -lineal y V_σ el $K[t]$ -modulo asociado, con divisores elementales $d_i \in K[t]$. Hallar condiciones sobre los d_i para que V_σ sea un $K[t]$ -modulo semisimple. Probar ademas que V_σ es semisimple si y solo si σ es diagonalizable (existe una base de V de autovectores de σ).
- 3) Sea A un anillo semisimple y $L \subset A$ un ideal a izquierda. Probar que existe $e \in A$ tal que $e^2 = e$ y $L = A.e$.
- 4) Sea K un cuerpo y $T_2(K) \subset M(2 \times 2, K)$ el subanillo de matrices triangulares superiores. Probar que el anillo $T_2(K)$ no es semisimple.
- 5) Calcular los divisores elementales del \mathbb{Z} -modulo $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, donde $A = \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_3$.
- 6) Determinar los divisores elementales de los grupos abelianos definidos por generadores y relaciones siguientes:
 - a) generadores $\{e_1, e_2\}$, relacion $3e_1 = 4e_2$.
 - b) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 0$ y $3e_1 = 6e_3$.
 - c) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $3e_1 = e_2$ y $e_2 = 3e_3$.
- 7) Determinar todas las clases de isomorfismo de grupos abelianos de ordenes 8, 16, 180 y 210 respectivamente.

8) Sea A un grupo abeliano de orden n .

a) Si r es un divisor de n entonces A posee subgrupos de orden r . Si r es primo entonces A posee elementos de orden r .

b) Si $a \in A$ posee orden maximal (entre los ordenes de elementos de A) entonces a genera un sumando directo de A .

c) Si n es libre de cuadrados entonces A es ciclico.

9) Sean A, B, C grupos abelianos de tipo finito.

a) $A \oplus A \cong B \oplus B$ implica $A \cong B$.

b) $A \oplus C \cong B \oplus C$ implica $A \cong B$.

c) Las afirmaciones analogas a a) y b) para modulos finitamente generados sobre anillos mas generales que \mathbb{Z} son falsas.

10) Determinar todas las clases de isomorfismo de modulos sobre $\mathbb{C}[t]$ que como espacio vectorial complejo tienen dimension 2. Analogo problema para dimensiones 3 y 4.

Determinar todas las formas canonicas de Jordan de matrices complejas de $n \times n$ para $n = 2, 3$ y 4.

11) Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de un endomorfismo nilpotente.

12) Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de las siguientes matrices complejas:

13) Dar ejemplos de matrices $a, b \in M(n \times n, K)$ no semejantes, con el mismo polinomio minimal y el mismo polinomio caracteristico.

(Def.: se dice que a y b son semejantes si existe $u \in M(n \times n, K)^*$ tal que $a = u.b.u^{-1}$; equivalentemente, los $K[t]$ -modulos asociados K_a^n y K_b^n son isomorfos).

14) Sea V un espacio vectorial de dimension n sobre un cuerpo K y sea $\sigma : V \rightarrow V$ un morfismo K -lineal.

a) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V . Sea \mathcal{C} el conjunto de las funciones crecientes $\lambda : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, y para $\lambda \in \mathcal{C}$ denotemos $v_\lambda = v_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge v_{\lambda(k)}$, de manera que $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{C}}$ es una base de $\wedge^k(V)$. Describir la matriz de $\wedge^k(\sigma) : \wedge^k(V) \rightarrow \wedge^k(V)$ en esta base. (Probar que el elemento (λ_1, λ_2) de esta matriz es el determinante del menor (λ_1, λ_2) de la matriz de σ).

b) Probar la identidad en $K[t]$: $\det(t \cdot \text{id}_V + \sigma) = \sum_{j=0}^n \text{tr}(\wedge^j(\sigma)) \cdot t^{n-j}$.

15) (opcional) Sea A un dominio de ideales principales con cuerpo de fracciones K y sea M un A -modulo de tipo finito.

Denotamos $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$ y $M' = \text{Hom}_A(M, K/A)$ ($*$ -dual y $'$ -dual de M).

a) M es de torsion sii $M^* = 0$ sii $M \cong M'$.

b) M es sin torsion sii M es libre sii $M \cong M^*$.

c) Dado un submodulo $S \subset M$ y $m \in M - S$, existe $\varphi \in M'$ tal que $\varphi(S) = 0$ y $\varphi(m) \neq 0$. En particular, $M' = 0$ sii $M = 0$.

d) Sean $\alpha : M \rightarrow M^{**}$ y $\beta : M \rightarrow M''$ los morfismos naturales. Entonces $\ker(\alpha) = \text{t}(M)$ y $\ker(\beta) = 0$. Si M es libre entonces α es un isomorfismo. Si M es de torsion entonces β es un isomorfismo.