

ALGEBRA II - PRACTICA 5

1er. cuatrimestre 1995

- 1) a) Existen modulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.
 - b) Si L es un A -modulo libre y $x \in L$ es un elemento no nulo, todo miembro del ideal anulador de x es divisor de cero. En particular, si A es integro entonces todo elemento no nulo de L es linealmente independiente.
 - c) Existen modulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente (considerar el cuerpo de fracciones de A).
 - d) Existen modulos libres que admiten submodulos no libres.
 - e) Existen modulos libres que admiten submodulos libres que no son sumandos directos.
 - f) Un grupo cuasiciclico no es libre como \mathbb{Z} -modulo.
 - g) Todo modulo sobre un anillo de division es libre.
- Sugerencia: utilizando el lema de Zorn, demostrar que existe un conjunto linealmente independiente maximal.

2) El grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre.

(hay una demostracion en "Infinite abelian groups" por I. Kaplansky, pag. 48).

Comentario: si K es un cuerpo, segun el ejercicio 1 g el K -modulo $K^{\mathbb{N}}$ es libre, aunque no parece ser facil exhibir una base.

3) Sea A un anillo y M un A -modulo a izquierda.

a) Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de submodulos ciclicos no nulos de M tal que I es infinito y M es suma directa interna de los M_i . Probar que para todo sistema de generadores S de M resulta $\text{card}(S) \geq \text{card}(I)$.

(si es necesario ver "Lectures in Abstract Algebra" por N. Jacobson, vol. II, pag. 241).

b) En las condiciones de a), si $(N_j)_{j \in J}$ es otra familia de submodulos ciclicos no nulos tal que M es suma directa interna de los N_j entonces $\text{card}(J) = \text{card}(I)$.

c) Si M admite una base infinita B , para todo sistema de generadores S de M resulta $\text{card}(S) \geq \text{card}(B)$. Para toda otra base B' de M se verifica $\text{card}(B') = \text{card}(B)$; en particular, toda otra base B' de M es infinita.

d) Existen módulos libres que admiten bases finitas no coordinables. Por ejemplo, sea M un A -módulo libre con base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y sea B el anillo $\text{End}_A(M)$. Si $u, v \in B$ están definidos por

$u(x_{2i}) = x_i$, $u(x_{2i+1}) = 0$ y $v(x_{2i}) = 0$, $v(x_{2i-1}) = x_i$ entonces $\{u, v\}$ es una base de B como B -módulo. Deducir que $B \cong B^2$ y que $B^n \cong B^m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

4) Sea D un anillo de división y V un D -módulo.

a) (Lema de agregado) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $x \in V$ no es combinación lineal de los x_i entonces la familia que se deduce de $(x_i)_{i \in I}$ agregando el elemento x , es linealmente independiente.

b) (Lema de intercambio) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $(y_j)_{j \in J}$ es una familia de generadores de V , para todo $p \in I$ existe $j \in J$ tal que la familia que se deduce de $(x_i)_{i \in I}$ reemplazando x_p por y_q , es linealmente independiente.

c) Si V admite una base finita, toda otra base es finita y del mismo cardinal.

d) Si V es un espacio vectorial, dos bases cualesquiera de V son coordinables.

5) Se dice que un anillo A tiene noción de rango si para todo A -módulo libre L todas las bases de L tienen el mismo cardinal (en cuyo caso, ese cardinal se denomina rango de L). Por 3 c), basta con considerar L con base finita. Equivalentemente, A tiene noción de rango si, para $n, m \in \mathbb{N}$, $A^n \cong A^m$ implica $n = m$.

a) Supongamos que el anillo B tiene noción de rango y que existe un morfismo de anillos $A \rightarrow B$. Entonces A tiene noción de rango.

b) Un anillo de división tiene noción de rango.

c) Un anillo conmutativo tiene noción de rango.

Sug.: utilizar la existencia de un ideal maximal.

d) El anillo de 3 d) no tiene noción de rango.

6) Sea A un anillo conmutativo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y M un A -módulo. Demostrar que existe un isomorfismo natural de $S^{-1}A$ -módulos $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$.

7) Sea A un anillo conmutativo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y $M \rightarrow N \rightarrow P$ una sucesión exacta de A -módulos. Demostrar que la sucesión $S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \rightarrow S^{-1}P$ también es exacta. Decimos entonces que el functor $F(M) = S^{-1}M$ de la categoría de A -módulos en la categoría de $S^{-1}A$ -módulos, es exacto.

8) a) Sea A un anillo conmutativo y sea T un A -módulo. Demostrar que para toda sucesión

exacta $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ de A -modulos, la sucesion de A -modulos $M \otimes_A T \rightarrow N \otimes_A T \rightarrow P \otimes_A T \rightarrow 0$ tambien es exacta. Decimos entonces que el functor $F_T(M) = M \otimes_A T$ de la categoria de A -modulos en si misma, es exacto a derecha.

b) Probar que F_T no es exacto en general. Considerar por ejemplo el morfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ de multiplicacion por $n \in \mathbb{Z}$ y tensorizar por $T = \mathbb{Z}_n$.

Definicion: se dice que T es un A -modulo plano si F_T es exacto.

c) Generalizando el ejemplo de b), sea $f : A^n \rightarrow A^m$ un morfismo de A -modulos libres definido por la matriz $a \in M(m \times n, A)$. Si $J \subset A$ es un ideal, probar que el morfismo $f \otimes_A A/J : (A/J)^n \rightarrow (A/J)^m$ de A/J -modulos libres, esta definido por la matriz $\bar{a} \in M(m \times n, A/J)$ obtenida de a reduciendo los coeficientes modulo J . En particular, si $a \in M(m \times n, J)$ entonces $f \otimes_A A/J = 0$. Explicitar los ejemplos $A = \mathbb{Z}$ y $A = k[x_1, \dots, x_r]$.

9) Sea A un anillo conmutativo y $P \subset A$ un ideal primo. Denotamos A_P el anillo $S^{-1}A$ donde $S = A - P$. Si M es un A -modulo, denotamos M_P el A_P -modulo $S^{-1}M$.

a) Probar que A_P tiene un unico ideal maximal (se dice entonces que es un anillo local).

b) Probar que son equivalentes:

— i) $M = 0$

— ii) $M_P = 0$ para todo ideal primo $P \subset A$.

— iii) $M_P = 0$ para todo ideal maximal $P \subset A$.

c) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -modulos. Probar que $\ker(f)_P \equiv \ker(f_P)$ y $\operatorname{coker}(f)_P \equiv \operatorname{coker}(f_P)$ para todo ideal primo $P \subset A$. (usar Ej. 7)

d) Probar que son equivalentes:

— i) f es inyectivo (resp. sobreyectivo)

— ii) f_P es inyectivo (resp. sobreyectivo) para todo ideal primo $P \subset A$.

— iii) f_P es inyectivo (resp. sobreyectivo) para todo ideal maximal $P \subset A$.

Sugerencia: aplicar b) a $\ker(f)$ (resp. $\operatorname{coker}(f)$).

e) Se dice que un A -modulo M es localmente libre si M_P es un A_P -modulo libre para todo primo P . Demostrar:

— i) Un modulo localmente libre es plano.

— ii) Un modulo libre es localmente libre (la reciproca es falsa).

10) Sea A un anillo conmutativo y sean $f : A^r \rightarrow A^s$ y $g : A^m \rightarrow A^n$ morfismos definidos por matrices $\alpha \in M(s \times r, A)$ y $\beta \in M(n \times m, A)$. Denotamos $\alpha \otimes \beta \in M(s.n \times r.m, A)$ la matriz de $f \otimes g : A^r \otimes A^m \rightarrow A^s \otimes A^n$ en las bases canonicas $e_i \otimes e_j$ ordenadas lexicograficamente. Explicitar $\alpha \otimes \beta$, que se llama "producto de Kronecker de α y β ".

10) Probar que existen isomorfismos

a) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de \mathbb{R} -álgebras.

Sugerencia: buscar elementos idempotentes.

b) $A[t] \otimes_A A[t] \cong A[x, y]$ de A -álgebras, donde A es un anillo conmutativo.

11) Sea A un anillo conmutativo.

a) Si M es un A -módulo divisible y N es un A -módulo de torsión entonces $M \otimes_A N = 0$.

b) Si M es divisible (resp. de torsión) entonces $M \otimes_A N = 0$ es divisible (resp. de torsión) para todo N .

12) Sea A un anillo conmutativo. Para cada A -módulo M denotemos $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$.

a) Existe un isomorfismo natural $(M \otimes_A N)^* \cong \text{Bil}_A(M \times N; A)$.

b) Existe un morfismo natural $\mu_{M,N} : M^* \otimes_A N^* \rightarrow (M \otimes_A N)^*$ tal que $\mu_{M,N}(\alpha \otimes \beta)(m \otimes n) = \alpha(m) \cdot \beta(n)$.

c) Probar que si M y N son libres de rango finito entonces $\mu_{M,N}$ es un isomorfismo.