

ALGEBRA II - PRACTICA 3

1er. cuatrimestre 1995

Correcciones a la Practica 2

Ejercicio 14: reemplazar la definicion de R por $(x, y)R(x', y')$ si existe $z \in N$ tal que $z + x + y' = z + x' + y$.

Ejercicio 6: reemplazar "El anillo $A[[S]]$ es conmutativo si y solo si S es conmutativo." por "El anillo $A[[S]]$ es conmutativo si y solo si A y S son conmutativos."

Ejercicio 17 i): reemplazar $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) \cong \mathbb{R}[t]$ por $K(\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)) \cong \mathbb{R}(t)$ (K denota cuerpo de fracciones como en Ej. 2)

1) a) (propiedad universal del algebra de polinomios)

Sea A un anillo conmutativo y $A \rightarrow B$ una A -algebra conmutativa. Verificar que dar un morfismo de A -algebras $A[x] \rightarrow B$ es equivalente a dar un elemento $b \in B$ (el morfismo correspondiente a $b \in B$ se denomina especializacion en b). Generalizacion al caso de morfismos $A[x_1, \dots, x_m] \rightarrow B$: existe una biyeccion canonica $\text{Hom}_{A\text{-alg}}(A[x_1, \dots, x_m], B) \cong B^m$.

b) Para $f \in A[x]$, verificar que dar un morfismo de A -algebras $A[x]/\langle f \rangle \rightarrow B$ es equivalente a dar una solucion $b \in B$ de la ecuacion $f(x) = 0$. Generalizar al caso de varias ecuaciones en varias variables $f_1, \dots, f_r \in A[x_1, \dots, x_m]$. Reflexionar sobre los ejemplos $B = A$, $B = A[t]$, $B = A[[t]]$, $A = \mathbb{R} \subset B = \mathbb{C}$, etc.

2) Sea A un anillo conmutativo y $\alpha \in M(n \times m, A)$ una matriz $n \times m$ con coeficientes en A . Verificar que la aplicacion $a : A^m \rightarrow A^n$ definida por $a(x) = \alpha \cdot x$ (producto de matrices, identificando A^m con $M(m \times 1, A)$) es un morfismo de A -modulos. Dar un sistema finito de generadores de $\text{im}(a)$. Probar que el conjunto $S = \{x \in A^m / \alpha \cdot x = 0\}$ de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogeneas definido por α , es un A -submodulo de A^m . Es todo submodulo de A^m de esta forma ?

3) Sea A un anillo conmutativo y M un A -modulo. Para los siguientes morfismos de A -modulos, calcular nucleo e imagen y determinar cuales morfismos son monomorfismo, epimorfismo, seccion, retraccion, isomorfismo.

- a) $f : M^n \rightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$
- b) $f : M^n \rightarrow M^n$, $f(x) = (\sum_{1 \leq i \leq j} x_i)_{1 \leq j \leq n}$
- c) si $n \leq m$, $f : M^n \rightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$
- d) si $n \leq m$, $f : M^m \rightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$
- e) si $z \in M^n$, $f : A^n \rightarrow M$, $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \cdot z_i$
- f) si $z \in A^n$, $f : M^n \rightarrow M$, $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} z_i \cdot x_i$
- g) para $a \in A$, $e_a : A[x] \rightarrow A$, $e_a(\sum_i a_i \cdot x^i) = \sum_i a_i \cdot a^i$
- h) $d : A[x] \rightarrow A[x]$, $d(\sum_i a_i \cdot x^i) = \sum_i a_i \cdot i x^{i-1}$. El morfismo d tiene las propiedades adicionales $d(p \cdot q) = d(p) \cdot q + p \cdot d(q)$ y $d(a \cdot x^0) = 0$
- i) $\text{tr} : M(n \times n, A) \rightarrow A$, $\text{tr}(a) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$ (morfismo traza)
- j) $\text{dg} : M(n \times n, A) \rightarrow A^n$, $\text{dg}(a) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$
- k) $\Delta : A \rightarrow A^J$, $\Delta(a)_j = a, \forall j \in J$. (morfismo diagonal)
- l) si $J \subset I$, $\rho : M^I \rightarrow M^J$, $\rho(\alpha) = \alpha|_J$.

4) Verificar que las siguientes aplicaciones son morfismos de \mathbb{Z} -modulos. Calcular nucleo e imagen.

- a) $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, $f(x) = e^{2\pi i x}$
- b) $f : (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $f(x) = |x|$
- c) $(n \in \mathbb{N})$, $f_n : (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, $f_n(x) = x^n$

5) a) Si f y g son endomorfismos de la estructura aditiva de \mathbb{Q} , son equivalentes las siguientes condiciones:

- i) $f(1) = g(1)$
- ii) $f|_{\mathbb{Z}} = g|_{\mathbb{Z}}$
- iii) $f = g$

Deducir que un endomorfismo de la estructura aditiva de \mathbb{Q} satisface $f(1) = 1$ si y solo si $f = \text{id}_{\mathbb{Q}}$.

b) Si V y W son \mathbb{Q} -espacios vectoriales, una aplicacion $f : V \rightarrow W$ es morfismo de \mathbb{Q} -espacios vectoriales si y solo si es morfismo de grupos.

6) a) Sea A un anillo y $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -modulos.

- i) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.
(Def.: un A -modulo M es simple si sus unicos submodulos son $\{0\}$ y M)
- ii) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.
- iii) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

iv) Probar que para un A -modulo M , el grupo aditivo $\text{End}_A(M) = \text{Hom}_A(M, M)$ con la operacion de composicion constituye un anillo. Si M es simple entonces $\text{End}_A(M)$ es un anillo de division.

b) Si I y J son conjuntos coordinables (existe una biyeccion $I \rightarrow J$) entonces M^I y M^J son isomorfos, para todo A -modulo M .

c) Una involucion de un A -modulo M es un morfismo $f : M \rightarrow M$ tal que $f^2 = \text{id}_M$. Toda involucion es un automorfismo. Exhibir ejemplos de involucion.

d) Un proyector de un A -modulo M es un morfismo $f : M \rightarrow M$ tal que $f^2 = f$. Probar que $M \cong \ker(f) \oplus \text{im}(f)$. Probar que, reciprocamente, si A y B son submodulos de M tales que $M \cong A \oplus B$ entonces existe un unico proyector $f : M \rightarrow M$ tal que $A = \ker(f)$ y $B = \text{im}(f)$.

7) a) El morfismo $\text{tr} : M(n \times n, A) \rightarrow A$, $\text{tr}(a) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$ satisface

i) $\text{tr}(e) = n.1$ (e denota la matriz identidad)

ii) $\text{tr}(a.b) = \text{tr}(b.a)$ (A conmutativo)

b) Si A es un anillo conmutativo tal que $m.a = 0$ implica $a = 0$ o $m = 0$ ($a \in A, m \in \mathbb{Z}$) entonces tr es el unico morfismo $M(n \times n, A) \rightarrow A$ que satisface i) y ii).

c) Sea A como en b) y $n > 1$. Probar que no existe ningun epimorfismo $f : M(n \times n, A) \rightarrow A$ tal que $f(a.b) = f(a).f(b), \forall a, b$.

8) Sea A un anillo conmutativo.

a) Para cada A -modulo M definir un isomorfismo de A -modulos $\text{Hom}_A(A, M) \cong M$.

b) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

c) Dado un A -modulo M , se llama dual de M al A -modulo $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. La aplicacion $c_M : M \rightarrow M^{**}$ definida por $c_M(m)(f) = f(m)$ (para $m \in M, f \in M^*$) es un morfismo de A -modulos y $\ker(c_M) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

9) Sea A un dominio de integridad. Demostrar que si $A^n \cong A^m$ entonces $m = n$.

10) Sea A un dominio de integridad y $a \in M(n \times n, A)$. Denotemos $v_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in A^n$ la j -esima columna de a . Demostrar:

a) v_1, \dots, v_n son linealmente independientes si y solo si $\det(a) \neq 0$.

b) v_1, \dots, v_n generan A^n si y solo si $\det(a)$ es una unidad de A .

c) dar criterios de independencia lineal y generacion para $v_1, \dots, v_m \in A^n$.

(Definicion: para $a \in M(n \times n, A)$, $\det(a) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$)

11) Sea M un A -modulo. Si H y K son submodulos de M , denotamos

$H + K = \{h + k, h \in H, k \in K\}$. Verificar que el conjunto de submodulos de M con la operacion $+$ es un semigrupo conmutativo. El unico elemento inversible es $\{0\}$.

12) Si X e Y son conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ es una funcion, el conjunto $\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$ se llama el grafo de f . Supongamos que X e Y son A -modulos. Demostrar que f es un morfismo de A -modulos si y solo si $\Gamma(f) \subset X \times Y$ es un submodulo.

13) a) Determinar los subgrupos de \mathbb{Z} .

b) Determinar los ideales de $K[x]$, donde K es un cuerpo.

14) Sea M un A -modulo. Se llama anulador del subconjunto $S \subset M$ a

$\text{An}(S) = \{a \in A/a.s = 0, \forall s \in S\}$. Si $x \in M$, $\text{An}(\{x\})$ sera indicado -por abuso de notacion- $\text{An}(x)$.

M se dice un A -modulo fiel si $\text{An}(M) = 0$.

a) $\text{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A .

b) $\text{An}(S) = A$ sii $S \subset \{0\}$.

c) $\text{An}(\bigcup_{j \in J} S_j) = \bigcap_{j \in J} \text{An}(S_j)$.

d) $\text{An}(S) = \bigcap_{s \in S} \text{An}(s)$.

e) si $S \subset T$ entonces $\text{An}(T) \subset \text{An}(S)$.

f) Si $S \subset M$ es A -estable entonces $\text{An}(S)$ es un ideal bilatero de A .

g) $M(n \times n, A)$ es un A -modulo fiel. Exhibir otros ejemplos de modulo fiel.

h) $\text{An}(M^J) = \text{An}(M^{(J)}) = \text{An}(M)$ si $J \neq \emptyset$.

15) Sea M un A -modulo. Si $S \subset M$ es un subconjunto y $N \subset M$ es un submodulo, se llama transportador de S en N a $(N : S) = \{a \in A/a.s \in N, \forall s \in S\}$.

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ sera indicado -por abuso de notacion- $(N : x)$.

a) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A .

b) $(0 : S) = \text{An}(S)$.

c) $(N : S) = A$ sii $S \subset N$.

d) $(N : \bigcup_{j \in J} S_j) = \bigcap_{j \in J} (N : S_j)$.

e) si $S \subset T$ entonces $(N : T) \subset (N : S)$.

f) $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$ si $J \neq \emptyset$.

g) Si $S \subset M$ es A -estable entonces $(N : S)$ es un ideal bilatero de A .

h) $(\bigcap_{j \in J} N_j : S) = \bigcap_{j \in J} (N_j : S)$.

i) si $N \subset P$ entonces $(N : S) \subset (P : S)$.

j) $(N : x).x = N \cap A.x$

k) si A es conmutativo y I, J son ideales de A , existe un isomorfismo natural de A -modulos $(I : J)/I \cong \text{Hom}_A(A/J, A/I)$.

16) Sea M un A -modulo. Caracterizar el modulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

a) $N = M^n, n \in \mathbb{N}, S = \{x \in N / \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

b) $N = M^n, n > 2, S = \{x \in N / x_1 = x_n, x_2 = 0\}$.

c) $N = A[x], S = \{x \in N / x(c) = 0\} (c \in A)$.

d) $N = M(n \times n, A), S = \{x \in N / \text{dg}(x) = 0\}$.

e) $N = M(n \times n, A), S = \{x \in N / \text{tr}(x) = 0\}$.

f) $N = M^J, S = \{x \in N / x_i = 0 \ \forall i \in I\} (I \subset J)$.

17) a) Establecer los siguientes isomorfismos de grupos:

i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

ii) $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}_{>0}$.

iii) $\mathbb{C}^*/G_n \cong \mathbb{C}^*$.

iv) $T^n \cong (\mathbb{S}^1)^n$ donde $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

b) $n.\mathbb{Z} \subset m.\mathbb{Z}$ sii m/n . En tal caso, $n.\mathbb{Z}/m.\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{n/m}$.

c) $G_n \subset G_m$ sii n/m . En tal caso, $G_n/G_m \cong G_{m/n}$.

18) Sea M un A -modulo. Se dice que un submodulo $N \subset M$ tiene indice finito si el modulo cociente M/N es finito. Probar que si N_1 y N_2 tienen indice finito en M entonces $N_1 \cap N_2$ tambien tiene indice finito.