Notas muy informales sobre Geometría Diferencial

Fernando Cukierman

Abril 2012

Estas anotaciones fueron escritas para mi uso personal como guía durante el dictado de la materia Geometría Diferencial en el Depto. de Matemática, FCEN-UBA, en los años 2001, 2003, 2009 y 2011. Son publicadas aquí en la eventualidad de que puedan resultar útiles para los alumnos como guía durante la preparación del exámen final de la mencionada materia. Se trata de notas muy informales que evidentemente no reemplazan a la bibliografía recomendada oportunamente.

Def. de <u>variedad diferencial</u>

Sea X un conjunto.

- Una <u>carta</u> de dimensión n en X es una ~~[illegible]~~ par $c = (\mathcal{U}, \varphi)$ donde $\mathcal{U} \subset X$ es un subconjunto y $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función tal que $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U})$ biyectiva.

Decimos que $\mathcal{U}$ es el dominio de la carta c.

- Si $c = (\mathcal{U}, \varphi)$, $c' = (\mathcal{U}', \varphi')$ son dos cartas de dimensión n en X, decimos que c y c' son k-<u>compatibles</u> si $k = 0, 1, \ldots, \infty$

i) $\varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$, $\varphi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$

ii) Las aplicaciones $\varphi' \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \varphi'^{-1}$

$$\varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \xrightarrow{\varphi'} \varphi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$$

$$\varphi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \xrightarrow{\varphi'^{-1}} \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$$

son $\mathcal{C}^k$ (= admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes)

<u>Obs</u> si $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$ entonces c, c' son trivialmente k-compatibles $(\forall k)$

– Un *atlas* (de dim n) y tipo $\mathcal{C}^k$ en X es un conjunto de cartas (de dim n) ~~...~~ compatibles dos a dos y tales que la unión de los dominios es todo X.

– Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos atlas de dim n (de tipo $\mathcal{C}^k$) en X. Decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *equivalentes* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas
($\Leftrightarrow$ cada carta de $\mathcal{A}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{B}$)

– Una estructura de *variedad* diferencial ($\mathcal{C}^k$) de dimensión n en X es una clase de equivalencia de atlas (de dim n) en X.

Si $\mathcal{A}$ es un ~~...~~ atlas en X entonces $\mathcal{A}$ induce una estructura de variedad diferencial en X, a saber, la clase de $\mathcal{A}$.

– Atlas maximal: $\{\bigcup \mathcal{A},\ \mathcal{A}$ atlas de la variedad$\} = \mathcal{M}$ $\quad \exists!\, \mathcal{M} \,/\, \mathcal{M} \supset \mathcal{A}\ \forall \mathcal{A}$

Terminología:

variedad $\mathcal{C}^0$ = variedad topológica

variedad $\mathcal{C}^\infty$ = variedad diferencial
= variedad diferenciable
= " suave

Ejemplos

1) $X = \mathbb{R}^n$

$c = (\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ es una carta de dim n. ($\mathcal{C}^\infty$)

$\mathcal{A} = \{c\}$ es un atlas

Obs $\overline{\mathcal{A}}$ es grande: contiene todos los difeos $\varphi: U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos

La estructura de variedad diferencial inducida por este ~~atl~~ atlas se denomina "estructura standard" en $\mathbb{R}^n$.

2) $X \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

$c = (X, \varphi)$ $\quad\varphi$ = inclusión de X en $\mathbb{R}^n$

es una carta

$\mathcal{A} = \{c\}$ es un atlas.

Obs Sea $\psi: X \to \mathbb{R}^n$ / $\psi(X)$ abierto, $\psi: X \to \psi(X)$ difeo.
$c' = (X, \psi)$ carta
$\mathcal{B} = \{c'\}$ atlas, compatible con $\mathcal{A}$

3) Más generalmente, si X es ~~un~~ un conjunto

y $c = (X, \varphi)$ $\quad \varphi: X \to U$ biyectiva
$U \subset \mathbb{R}^n$ abierto

entonces $\mathcal{A} = \{c\}$ es ~~un~~ un atlas en X

(con una sola carta) $\rightsquigarrow$ X variedad diferencial

4) X conjunto

Podemos darle a X estructura de variedad diferencial de dimensión cero:

para cada $x \in X$, $c_x = \{\{x\}, \varphi_x\}$ $\quad \varphi_x: \{x\} \to \mathbb{R}^0 = \{0\}$

es una carta

$\mathcal{A} = \{c_x, x \in X\}$ es un atlas.

5) $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto

$f: U \to \mathbb{R}^m$ función

$\Gamma_f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m \;/\; y = f(x)\}$

tiene estructura de variedad:

$\pi_1 : \Gamma_f \to U$ primera proyección

es biyectiva, aplicar 3).

6) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dim n.

Elijo $v_1, \dots, v_n$ base de V.

$\rightsquigarrow \varphi : V \to \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi$ lineal, $\varphi(v_i) = e_i$

$c = (V, \varphi)$ carta, $\quad \mathcal{A} = \{c\}$ atlas.

Sea $v'_1, \dots, v'_n$ otra base, $c' = (V, \varphi')$ carta

Como $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (iso) lineal $\to \mathcal{C}^\infty$

$\to c, c'$ compatibles $\to \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ definen la misma estructura de variedad diferencial en V.

Producto de variedades

7) Sea $c_1 = (U_1, \varphi_1)$ una carta de dim n_1 en X_1

$c_2 = (U_2, \varphi_2)$ $\quad n_2 \quad X_2$

$\to c_1 \times c_2 = (U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ es una carta de dim $n_1 + n_2$ en $X_1 \times X_2$

Si c_1, c'_1 son cartas compatibles en X_1

c_2, c'_2 " " X_2

entonces $c_1 \times c_2$, $c'_1 \times c'_2$ " " en $X_1 \times X_2$

Por lo tanto, si $\mathcal{A}_1$ es un atlas en X_1

$\mathcal{A}_2$ " X_2

entonces $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{c_1 \times c_2, \; c_1 \in \mathcal{A}_1, \; c_2 \in \mathcal{A}_2\}$

es un atlas en $X_1 \times X_2$, que define la "variedad diferencial producto" verifican: $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{B}_1, \\ \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{B}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$

Similarmente con un producto finito de variedades $\rightsquigarrow X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Prop. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un atlas en X.
Decimos que $W \subset X$ es abierto si es unión finita de conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(V)$ donde $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathcal{A}$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Entonces, la colección de estos conjuntos abiertos satisface los axiomas de una topología en X (*) $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$

La llamamos la "topología inducida por el atlas $\mathcal{A}$"

(Es la topología menos fina tal que ~~...~~
~~...~~
para toda carta $c=(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, U es ~~abierto en~~ X
$(\Rightarrow U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)$ es abierto) y φ es continua)

(*) cerrado por intersecciones finitas y por uniones arbitrarias

($\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ = menor topología en X / las cartas de $\mathcal{A}$ son continuas)

Dem: ejercicio (ver atrás)

Prop. (Ejercicio) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ atlas en X.
son equivalentes $\Leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
$\Leftarrow$?

~~Dem~~ ~~ejercicio~~ (ver Malliavin)

Def. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Sea $\mathcal{A}$ un atlas en X. Se dice que $\mathcal{A}$ es compatible con $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$.

$\overline{\mathcal{A}}$ atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$.

8) Sea X un conjunto con atlas $\mathcal{A}$.

Sea $V \subset X$ un abierto (para $\tau_{\mathcal{A}}$)

Definimos un atlas $\mathcal{A}/V$ en V:

si $c = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$

sea $c/_V = (U \cap V, \varphi/_{U \cap V})$

$\mathcal{A}/V = \{ c/V ,\ c \in \mathcal{A} \}$ es un atlas en V

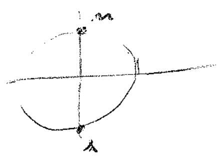
Si $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ (atlas equivalentes en X)

entonces $\mathcal{A}/V \sim \mathcal{B}/V$ (verificar)

$\Rightarrow$ V tiene estructura de variedad diferenciable

denominada "restricción" de la estructura en X"

9) $X = S^1$



$\pi : S^1 - \{n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ proyección estereográfica (norte)

$\pi' : S^1 - \{s\} \longrightarrow \mathbb{R}$ " " π

$c = (S^1 - \{n\}, \pi)$, $c' = (S^1 - \{s\}, \pi')$ son cartas de dim 1 en S^1

$\mathcal{A} = \{ c, c' \}$ es un atlas en S^1

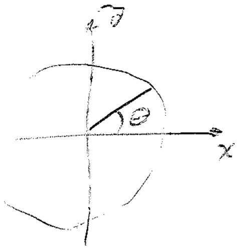
$U_1 = S^1 \cap (y > 0)$ $\qquad \varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_1(x,y) = x$

$U_2 = S^1 \cap (y < 0)$ $\qquad \varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_2(x,y) = x$

$U_3 = S^1 \cap (x > 0)$ $\qquad \varphi_3 : U_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_3(x,y) = y$

$U_4 = S^1 \cap (x < 0)$ $\qquad \varphi_4 : U_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi_4(x,y) = y$

$\mathcal{B} = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$ atlas de S^1



Elegir dos determinaciones de θ

$S^1 - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$S^1 - \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ atlas C^∞.

Otros ejemplos.
$\mathbb{P}^n$ / $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$
Grass.
Grupos de Lie
Espacios homogéneos.
T_g (a ... a)
$C(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{R}^n$ regular

Ejercicio: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \sim \mathcal{C}$.

Hacer S^n

Def Sea $(X, \mathcal{A})$ un conjunto provisto de un atlas.
Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.
Decimos que f es diferenciable (o de clase C^k, $k \geq 0$)
(con dos respecto a $\mathcal{A}$) si para toda carta
$c = (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{f|\mathcal{U}} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \nearrow & \\ \varphi(\mathcal{U}) & (f|\mathcal{U}) \circ \varphi^{-1} & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ "expresión local de f en la carta c"

$(f|\mathcal{U}) \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable (C^∞)

Prop Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ atlas equivalentes en X.
Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.
Entonces f es diferenciable respecto a $\mathcal{A}$ $\Longleftrightarrow$
" " " $\mathcal{B}$

Por ejercicio.

~~**Def** Sean X, Y variedades diferenciales $f: X \to Y$~~
~~Supongamos f continua~~
~~o sea, para cada carta $(\mathcal{V}, \psi)$ de Y~~
~~$f^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i^{-1}(N_i)$ donde $\varphi_i: \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cartas de X~~
~~$N_i \subset \varphi_i(\mathcal{U}_i)$ abiertos.~~

Def Sea X variedad, $U \subset X$ abierto.

$\mathcal{D}(U,\mathbb{R}) = \{ f : U \to \mathbb{R} \text{ diferenciable} \}$ DESPUES

(aplico la def. anterior a U como variedad)

Prop Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto.

$f : X \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\iff$ $f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ diferenciable

Dem cada U_i es unión de dominios de cartas.

Def X, Y variedades, $F : X \to Y$ continua.

Decimos que F es diferenciable si

para todo abierto $V \subset Y$

~~y toda (...)~~

y toda $f : V \to \mathbb{R}$ diferenciable

la composición $F^{-1}(V) \xrightarrow{F} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

es diferenciable.

Prop composición de diferenciables $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$

es diferenciable.

Dem inmediato.

Ej X variedad, $c = (U, \varphi)$ carta de X

Entonces $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

X variedad $\quad c=(\mathcal{U},\varphi)$, $d=(\mathcal{V},\psi)$ cartas

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}\cap\mathcal{V} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \arrow[rr, "\psi\varphi^{-1}"'] & & \psi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})
\end{tikzcd}$$

$\psi\varphi^{-1}$ función de cambio de coordenadas. ($\mathcal{C}^\infty$)

X, Y variedades, $\quad f: X \to Y$ función

$c=(\mathcal{U},\varphi)$ carta en X, $\quad c'=(\mathcal{U}',\varphi')$ carta en Y

tales que $f(\mathcal{U})\subset\mathcal{U}'$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{U}' \arrow[d, "\varphi'"] \\
\mathbb{R}^n \supset \varphi(\mathcal{U}) \arrow[r] & \varphi'(\mathcal{U}') \subset \mathbb{R}^{n'}
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{f}=\tilde{f}_{c,c'}=\varphi' f \varphi^{-1}$$

"expresión local de f en las cartas c, c'"

Sean otras cartas

$d=(\mathcal{V},\psi)$ en X, $\quad d'=(\mathcal{V}',\psi')$ en Y

tales que $f(\mathcal{V})\subset\mathcal{V}'$ $\quad (\Rightarrow f(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \subset f(\mathcal{U})\cap f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}'\cap\mathcal{V}')$

Entonces tenemos el diagrama conmutativo

PROA
nuevo
caminito

$$\begin{tikzcd}
\psi(U\cap V) \arrow[rr, "\tilde{b}_{d,d'}"] & & \psi'(U'\cap V') \\
U\cap V \arrow[u, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[rr, "b"] & & U'\cap V' \arrow[u, "\psi'"'] \arrow[d, "\varphi'"] \\
\varphi(U\cap V) \arrow[rr, "\tilde{b}_{c,c'}"'] \arrow[uu, bend left, "\gamma_{d,c} = \psi\varphi^{-1}"] & & \varphi'(U'\cap V') \arrow[uu, bend right, "\psi'\varphi'^{-1} = \gamma_{d',c'}"']
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{b}_{d,d'} \circ (\psi\varphi^{-1}) = (\psi'\varphi'^{-1}) \cdot \tilde{b}_{c,c'}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{b}_{d,d'} = (\psi'\varphi'^{-1}) \cdot \tilde{b}_{c,c'} \cdot (\psi\varphi^{-1})^{-1}$$

$$\boxed{\tilde{b}_{d,d'} = \gamma_{d,c} \cdot \tilde{b}_{c,c'} \cdot \gamma_{d',c'}^{-1}}$$

$X \xrightarrow{f} Y$, $x \in X$

<u>Def</u>

f es C^∞ en x si existen cartas

$c = (U, \varphi)$, $c' = (U', \varphi')$ $x \in U$, $f(x) \in U'$

tales que $\tilde{f}_{c,c'}$ es C^∞ en $\varphi(x)$.

<u>Prop</u> Misma afirmación vale $\forall$ par de cartas (por P_2)

<u>Def</u> f es C^∞ si es C^∞ en x, $\forall x \in X$.

Def Sean X, Y variedades C^∞, con atlas maximales $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}}$. Sea $F: X \to Y$ continua. Decimos que F es diferenciable si $\forall\, c=(U,\varphi)\in\bar{\mathcal{A}}$, $d=(V,\psi)\in\bar{\mathcal{B}}$ tales que $F(U)\subset V$ resulta $\tilde{F}$ diferenciable donde

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \arrow[r, "\tilde{F}"'] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{F} = \psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ se llama la "expresión local de F en las cartas c, d"

Prop $X \xrightarrow{F} Y$ continua. Son equiv:

a) F es diferenciable (C^∞)

b) $\exists$ atlas $\mathcal{A}\subset\bar{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}\subset\bar{\mathcal{B}}$ / $F(\mathcal{A})\subset\mathcal{B}$

(i.e. $\forall\, c=(U,\varphi)\in\mathcal{A}$, $\exists\, d=(V,\psi)\in\mathcal{B}$ /

$\varphi(U)\subset V$)

y $\forall$ tal c, d, $\tilde{F}$ es C^∞

Dem

a) $\Rightarrow$ b) claro

b) $\Rightarrow$ a) Denotemos $\mathcal{A}=\{c_i=(U_i,\varphi_i),\ i\in I\}$

$\mathcal{B}=\{d_j=(V_j,\psi_j),\ j\in J\}$

Para $i\in I$, $\lambda(i)\in J$ / $F(U_i)\subset V_{\lambda(i)}$

Sea $c=(U,\varphi)\in\bar{\mathcal{A}}$, $d=(V,\psi)\in\bar{\mathcal{B}}$ / $F(U)\subset V$

Quiero ver: $\tilde{F} : \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{V})$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Sabemos: $c \sim c_i \ \forall i$, $d \sim d_j \ \forall j$

Considero:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i \arrow[r, "F"] \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{V}\cap\mathcal{V}_{\lambda(i)} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, bend left, "\psi_{\lambda(i)}"] & \\
\varphi_i(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i) \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{F}_i"'] & \varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i) \arrow[r, "\tilde{F}"] & \psi(\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_{\lambda(i)}) \arrow[r, "\delta"'] & \psi_{\lambda(i)}(\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_{\lambda(i)})
\end{tikzcd}$$

$\tilde{F}_i$ es la expresión local de F en las cartas c_i, $d_{\lambda(i)}$

Sabemos que $\tilde{F}_i$ es $\mathcal{C}^\infty$

Como γ, δ son $\mathcal{C}^\infty$, resulta $\tilde{F}$ $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i)$. Como $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}\cap\mathcal{U}_i$, resulta $\tilde{F}$ $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi(\mathcal{U})$.

<u>Lema</u> $F : X \to Y$ cont. $\mathcal{A}$ atlas de X, $\mathcal{B}$ " " Y

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}$ atlas de X / $F(\mathcal{A}') < \mathcal{B}$

<u>Dem</u> Sea $c = (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$, $d = (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{B}$

Tomar $(\mathcal{U}\cap F^{-1}\mathcal{V}, \varphi|) \in$

Estas cartas son los elementos de $\mathcal{A}'$ ✓

~~**Prop** $f: X \to Y$ continua. DESPUES~~

~~f diferenciable $\Leftrightarrow$ $\exists$ cubrimientos abiertos~~

~~$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \ , \ Y = \bigcup_{j\in J} V_j$$~~

~~tales que $\forall i \in I, \exists j \in J$, $f(U_i) \subset V_j$~~

~~y $f|_{U_i} : U_i \to V_j$ es diferenciable~~

~~Dem ejercicio.~~

("diferenciable" es una propiedad local)

Ej $f: X \to \mathbb{R}$ dif. $\Leftrightarrow$ $\exists X = \bigcup U_i$ / $f|_{U_i}: U_i \to \mathbb{R}$ dif.

Prop $f: X \to Y$ continua.

f diferenciable $\Leftrightarrow$ para todo par de cartas (U, φ) de X, (V, ψ) de Y tales que $f(U) \subset V$

$\psi \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$

es aplicación C^∞ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$

(expresión local de f en las cartas)

Dem: ejercicio.

~~**Prop** Si $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ son diferenciables~~

~~entonces $f+g: X \to \mathbb{R}$, $f \cdot g: X \to \mathbb{R}$~~

~~Dem $X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+, \cdot} \mathbb{R}$~~

~~**Prop** $X \xrightarrow{f_1} Y_1$, $X \xrightarrow{f_2} Y_2$ diferenciables~~

~~$\Rightarrow X \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y_1 \times Y_2$ diferenciable~~

~~$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$~~

Prop $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$ diferenciables

$\Rightarrow G \circ F$ dif.

Dem verificar. ⊙

Notación $\mathcal{D}(X, Y) = \{ X \xrightarrow{F} Y \text{ dif.} \}$

$$\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{D}(X)$$

Para $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\mathcal{D}(\mathcal{U})$

Def $F : X \to Y$ es un difeomorfismo si F es dif. biyectiva y F^{-1} es dif.

Def X, Y son difeomorfos si $\exists\, F : X \to Y$ difeomorfismo.

⊙ Por lema, pág. 8'', $\exists$ atlas $\mathcal{A}$ de X, $\mathcal{B}$ de Y, $\mathcal{C}$ de Z / $F(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, $G(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$

⊙ ~~Sea $\bar{\mathcal{A}}$ atlas max de X~~
~~$\bar{\mathcal{B}}$ " Y~~
~~$\bar{\mathcal{C}}$ " Z~~

(comenzar con $\mathcal{C}$, modificar $\mathcal{B}$ si hace falta, después " $\mathcal{A}$ " ")

Para $c = (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$, $d = (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{B}$, $e = (W, \lambda) \in \mathcal{C}$ tales que $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, $G(\mathcal{V}) \subset W$ vale entonces

$(G \circ F)(\mathcal{U}) \subset W$, $\quad \widetilde{(G \circ F)}_{c,e} = \tilde{G}_{d,e} \circ \tilde{F}_{c,d}$

$\Rightarrow \widetilde{(G \circ F)}_{c,e} \in C^\infty \Rightarrow G \circ F \in C^\infty$ ✓

Prop $\pi_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ es diferenciable.
$\pi_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ expresión local es lineal
$(x, y) \mapsto x$

Prop $X \xrightarrow{f_1} Y_1$, $X \xrightarrow{f_2} Y_2$ diferenciables,

$\iff f = (f_1 \times f_2) : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ diferenciable

Prop $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $X \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ dif.

$\Rightarrow f+g : X \to \mathbb{R}$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ dif.

Dem $X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow[\cdot]{+} \mathbb{R}$

Cor $\mathcal{D}(X, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^X$ sub-anillo.

Obs ~~X ...~~ $X \xrightarrow{F} Y$ diferenciable

$\Rightarrow \mathcal{D}(Y, \mathbb{R}) \xrightarrow{F^*} \mathcal{D}(X, \mathbb{R})$ morfismo de anillos.

$f \longmapsto f \circ F$ $\qquad (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

~~Def X, Y ... difeomorfos~~

Def $F : X \to Y$ es un difeomorfismo si

F es diferenciable, biyectiva y F^{-1} es diferenciable.

Def X, Y son difeomorfos ($X \cong Y$)

si $\exists F : X \to Y$ difeo.

Prop $F : X \to Y$ cont. Son equiv.

~~NUEVA~~

a) F es $\mathcal{C}^\infty$

b) $\forall V \subset Y$ abierto, $\forall f : V \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$

la composición $F^{-1}V \xrightarrow{F} V \to f$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $F^{-1}V$.

Otros tipos de variedades

Si en la Def. de variedad diferencial reemplazamos la condición "$\varphi\circ\psi^{-1}$, $\psi\circ\varphi^{-1}$ C^∞" por

C^r — variedad C^r

analítica real — variedad analítica real

Variedad holomorfa: cartas $c=(U,\varphi)$, $\varphi: U\to\mathbb{C}^n$

$\varphi\circ\psi^{-1}$, $\psi\circ\varphi^{-1}$ holomorfas ($=$ analíticas)

Obs: variedad holomorfa de dim $=1$ $=$ superficie de Riemann

Las definiciones anteriores tienen sentido en cada uno de estos contextos.

Gérmenes de funciones

1) Gérmenes de funciones continuas en un espacio topo.

X variedad diferencial, $x\in X$.

Consideramos pares ordenados (U,f)

donde U entorno abierto de x, $f: U\to\mathbb{R}$ diferenciable.

Definimos $(U,f)\sim(V,g)$ si $\exists\, W\subset U\cap V$ entorno de x

tal que $f|_W = g|_W$.

Relación de equivalencia.

Notación: clase de $(U,f) = f_x$ = "germen de f en x"

$D(X)_x = D_x = \{(U,f)\}/\sim$ = conjunto de gérmenes en x

D_x es anillo:

$\overline{(U,f)} + \overline{(V,g)} \underset{def}{=} \overline{(W,f+g)}$ (cualquier $W\subset U\cap V$)

$\overline{(U,f)}\cdot\overline{(V,g)} \underset{def}{=} \overline{(W,f\cdot g)}$

Obs $\quad D(\mathcal{U},\mathbb{R}) \longrightarrow D_x \qquad (\mathcal{U} \ni x)$

$\qquad f \longmapsto \overline{(\mathcal{U},f)}$

es morfismo de anillos

Obs $\quad D_x \xrightarrow{ev_x} \mathbb{R}$

$\overline{(\mathcal{U},f)} \longmapsto f(x)$

bien definido y morfismo de anillos
(evaluación)

Def $\quad M_x = \ker ev_x \subset D_x$
(ideal maximal de D_x)

Ej $\quad X = \mathbb{R}^n, \quad x = 0 = (0,\dots,0)$

Lema $\quad f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^\infty \quad$ ($\mathcal{U}$ entorno de 0)

$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i(x) \qquad g_i \ \mathcal{C}^\infty$

Dem ejercicio (Taylor) ver Dieudonne Ejercicio VIII, 14(7)

$\Rightarrow M_0 =$ ideal generado por $x_1, \dots, x_n$

Esto se transporta a cualquier variedad.

Prop $\quad X$ variedad, $x \in X$, $(\mathcal{U},\varphi)$ carta en x con $\varphi(x) = 0$.

Entonces $D(X)_x \supset M_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

$\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$

Dem $\quad$ Sea f_x un germen en x con $ev_x(f_x) = 0$

Puedo suponer $f_x = (\mathcal{V}, f)$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ diferenciable $f(x) = 0$

Lema $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ C^∞ $(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n)$ entorno de 0

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \, g_i$$

donde $g_i = g_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es C^∞

Dem

$n=1$ $f(x) = f(0) + x \cdot g(x)$ g C^∞

Sea $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ $(x \neq 0)$

Quiero ver: g se extiende de modo C^∞ a $x = 0$.

Defino $g(0) = f'(0)$

Quiero ver: g es C^∞

Sea $g_n(x) = \dfrac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{i)}(0)}{i!} \cdot x^i}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$ $n \neq 0$

$$g_n(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

Paso inductivo:

$f(x) = f(x) - f(0, x_2, \dots, x_n) + f(0, x_2, \dots, x_n) = \dots$

Afirmo a- g_n es continua $\forall n$

b- g_n es derivable, $\cancel{g_n' = g_{n+1}}$

Como $g = g_0$, resulta g C^∞.

a- Usar Taylor

b- Es claro que g_n es derivable en x, $\forall x \neq 0$. $\left(\cancel{g_n' = g_{n+1}} \text{ chequeta}\right)$

Veamoslo para $x=0$, usando def. de derivada:

$$g_n'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g_n(x) - g_n(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\dfrac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{i)}(0)}{i!} x^i}{x^{n+1}} - \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i}{x^{n+2}} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}$$ ✓

$$\begin{tikzcd} x \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ 0 \in \varphi(U) \arrow[ur, "f\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Lema $\Rightarrow$ $f\circ\varphi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i$ & g_i C^∞ en un entorno de $0\in\varphi(U)$

$\Rightarrow$ $f = \sum (x_i\circ\varphi)\cdot(g_i\circ\varphi)$ ✓

<u>Obs</u> Si (U',φ') es otra carta en x entonces φ'_i $(i=1,\dots,n)$ es <u>otro</u> sistema de generadores del mismo ideal $M_x \subset D_x$.

A anillo conmutativo, $I, J \subset A$ ideales

$I\cdot J$ = ideal generado por todos los $f\cdot g$, $f\in I$, $g\in J$.

$I^n = I\cdot I \cdots I$ = ideal generado por $f_1\cdot f_2 \cdots f_n$, $f_i\in I$.

$I^n \supset I^{n+1}$ $\qquad A \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$

Vamos a considerar

$D_x \supset M_x \supset M_x^2 \supset M_x^3 \supset \cdots$

Vectores tangentes

X variedad, $x \in X$

Vamos a definir $TX(x)$ = espacio tangente de X en x.

$X = \mathbb{R}^n$, [$df(x)(v)$ x fijo, función de (f, v) mirando como función de f lo usual es mirar como función de v, con f fijo]

Si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector entonces v induce un operador $D(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta_v} \mathbb{R}$

$(U \ni x)$ $\quad f \longmapsto \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} =$

= derivada de f en x, en la dirección v

δ_v satisface
1) es $\mathbb{R}$-lineal
2) $\delta_v(f \cdot g) = f(x) \cdot \delta_v(g) + g(x) \cdot \delta_v(f)$ (derivada de un producto)
3) $\delta_v(f_1) = \delta_v(f_2)$ si $f_1 = f_2$ en un entorno de x.

Def X variedad, $x \in X$

Un vector tangente a X en x es una función

$$\delta : D(X)_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que
1) δ es $\mathbb{R}$-lineal
2) $\delta(f \cdot g) = ev_x(f) \cdot \delta(g) + ev_x(g) \cdot \delta(f)$

δ es derivación en x

Def $TX(x) = \{$vectores tangentes a X en $x\}$

Prop $TX(x)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $D(X)_x^*$ (= esp. vect. de dim ∞)

Dem verificar: δ_1, δ_2 satisfacen 1), 2) $\Rightarrow$ $\delta_1 + \delta_2$ también
$\Rightarrow \lambda \delta_1$ " $(\lambda \in \mathbb{R})$

Vamos a ver: $\dim TX(x) = \dim X = n$

(en particular, $< \infty$)

Sea $c = (U, \varphi)$ una carta en x

$$U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R} \qquad \varphi_i = \pi_i \circ \varphi$$

funciones coordenadas

$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x : D_x \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

verificar: $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x \in TX(x)$

Notación: $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (f) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(x)$

Obs

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_x (\varphi_j) = \delta_{ij}$$

Prop $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}$ es base de $TX(x)$

Antes demostramos:

Prop X variedad, $x \in X$

$M_x \subset D_x$ (ideal de gérmenes que se anulan en x)

$M_x^2 = M_x \cdot M_x$ (producto de ideales)

$= \{ \sum_i f_i \cdot g_i \ , \ f_i, g_i \in M_x \}$

Entonces $\dim_{\mathbb{R}} M_x / M_x^2 = n$

Dem Sea $c = (U, \varphi)$ una carta en x con $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \varphi_i \in M_x$. Afirmo: $\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_n \in M_x / M_x^2$ base

Sabemos que $M_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

$\Rightarrow \overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_n$ generan M_x / M_x^2 (como $\mathbb{R}$-esp vect.)

Son l.i.: sup. $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\varphi}_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum \lambda_i \varphi_i \in M_x^2 \Rightarrow \sum \lambda_i x_i \in M(\mathbb{R}^n)_0^2$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^N f_j \cdot g_j \qquad f_j, g_j \ \mathcal{C}^\infty, \text{ nulas en } 0.$$

Aplicar $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

Obs si (V, Ψ) es otra carta en x

$\overline{\Psi}_1, \dots, \overline{\Psi}_n$ es otra base de M_x/M_x^2

Después calculamos la matriz de cambio de base.

~~Prop Sea $\delta: D_x \to \mathbb{R}$ un vector tangente~~

~~Entonces~~

~~a) $\delta(M_x^2) = 0$~~

Def M_x/M_x^2 = espacio co-tangente de X en x.

Prop $TX(x)$ es naturalmente isomorfo a $(M_x/M_x^2)^*$

Dem (y definición del iso)

Sea $\delta: D_x \to \mathbb{R}$ un vector tangente en x.

Afirmo: $\delta(M_x^2) = 0$

Basta con ver $\delta(f \cdot g) = 0$, $\forall f, g \in M_x$

Pero $\delta(f \cdot g) = f(x) \cdot \delta(g) + g(x) \cdot \delta(f) = 0$ $\quad (f(x) = g(x) = 0)$

También observamos que $\delta(f) = 0$ si $f =$ cte.

$(\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) \to \delta(1) = 0)$

Sea $\overline{\delta}: M_x/M_x^2 \to \mathbb{R}$ inducida por $\delta|_{M_x}$ $\left(\begin{matrix}\overline{\delta} \text{ es} \\ \mathbb{R}\text{-lineal}\end{matrix}\right)$

Afirmo: $TX(x) \xrightarrow{\alpha} (M_x/M_x^2)^*$ iso de $\mathbb{R}$-esp. vect.

$\delta \longmapsto \overline{\delta}$ $\qquad (D_x = \mathbb{R}.1 + M_x)$

$\overline{\delta} = 0 \Rightarrow \delta|_{M_x} = 0 \Rightarrow \delta = 0$ (porque $\delta(1) = 0$)

sobre: sea dada $\Delta: M_x \to \mathbb{R}$ lineal / $\Delta(M_x^2) = 0$

Defino $\delta: D_x \to \mathbb{R}$

$$\delta(f) = \Delta(f - f(x)) \qquad (f - f(x) \in M_x)$$

$\delta \in TX(x)$: 1) claro

2) $\delta(f \cdot g) = \Delta(f \cdot g - f(x) \cdot g(x))$

$= \Delta\big((f - f(x))(g - g(x)) + f(x) \cdot (g - g(x)) + g(x) \cdot (f - f(x))\big)$

$= f(x)\, \delta(g) + g(x) \cdot \delta(f)$

<u>Obs</u> El iso $TX(x) \cong (m_x/m_x^2)^*$ no depende de elección de carta en x.

Afirmo: si $c=(U,\varphi)$

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x\right) = \bar{\varphi}_i^* \quad (\text{base dual de } \{\bar{\varphi}_i\})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\Big|_x \quad \text{base de } TX(x).$$

<u>Obs</u> Un vector tangente $v \in TX(x)$ se escribe

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

De hecho, $v = \sum_{i=1}^{n} v(\varphi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x$ (evaluar en φ_j)

<u>Obs</u> Si (V,ψ) es otra carta en x

tengo dos bases $\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial\psi_j}\Big|_x\right\}$ de $TX(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial\psi_j}\Big|_x \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$a_{ij} = ?$ Evalúo en ψ_k

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x (\psi_k) = \sum_j a_{ij}\,\delta_{jk} = a_{ik}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi_i}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_x = \sum_j \frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi_i}(x)\, \frac{\partial}{\partial\psi_j}\Big|_x \qquad (\text{"regla de la cadena"})$$

Derivada

~~Diferencial~~ de una función.

$F : X \longrightarrow Y$ aplicación diferenciable

$x \in X$

Defino aplicación lineal

$dF(x) : TX(x) \longrightarrow TY(F(x))$

Sea $\delta \in TX(x)$, $\delta : D(X)_x \longrightarrow \mathbb{R}$

~~xxxxxxxx~~

Si (V, f) es un germen de función en $f(x)$, considero

$$F^{-1}(V) \xrightarrow{F} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$(F^{-1}(V), f \circ F)$ germen de función en x

Obtengo $D(Y)(f(x)) \xrightarrow{F^*} D(X)(x)$

$$F^*(\overline{V, f}) = \overline{(F^{-1}(V), f \circ F)}$$

Verificar: - F^* bien definido
- morfismo de anillos.

Ahora defino: $dF(x)(\delta) = \delta \circ F^*$

o sea, $dF(x)(\delta)(f) = \delta(f \circ F)$

Es claro que $dF(x)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

$X \xrightarrow{F} Y$ $F(x) = y$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}(Y)_y \xrightarrow{F^*} \mathcal{D}(X)_x$ $F^*(M_y) \subset M_x$

$F^*(M_y^2) \subset M_x^2$

$\Rightarrow F^* : M_y/M_y^2 \to M_x/M_x^2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \delta(F) : (M_x/M_x^2)^* & \longrightarrow & (M_y/M_y^2)^* \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ TX(x) & \xrightarrow[dF(x)]{} & TY(y) \end{array}$$

verificar: conmuta

Expresión de $dF(x)$ en coordenadas locales.

Sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta en x

$(\mathcal{V}, \psi)$ carta en $F(x)$, con $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$

$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x$ base de $TX(x)$

$\frac{\partial}{\partial \psi_j}\Big|_{F(x)}$ base de $T\mathcal{Y}(F(x))$

$\psi F \varphi^{-1}$ expresión local de F

Entonces $\quad dF(x)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial}{\partial \psi_j}\Big|_{F(x)}$, $i = 1, \dots, n$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$a_{ij} = ?$ $\quad$ Evalúo en ψ_k

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x (\psi_k \circ F) = dF(x)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x\right)(\psi_k) = a_{ik}$$

$$dF(x)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(\psi_j \circ F)(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_j}\Big|_{F(x)}$$

$\rightarrow$ matriz de $dF(x)$ en las bases $= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(\psi_j \circ F)(x)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$

$=$ "matriz jacobiana de F (respecto de φ, ψ) en x"

Ej $\quad F : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathcal{Y} = \mathbb{R})$

Denotamos t coordenada usual en $\mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}$

$$dF(x) : TX(x) \longrightarrow T\mathbb{R}(F(x)) = \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{F(x)}$$

$$dF(x)(\delta) = \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{F(x)} \qquad \alpha = ?$$

Evalúo en ~~[illegible]~~ $t = id_{\mathbb{R}}$

$$\alpha = dF(x)(\delta)(id_{\mathbb{R}}) = \delta(F) \qquad (F \in \mathcal{D}(X)_x)$$

$$\boxed{dF(x)(\delta) = \delta(F) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{F(x)}}$$

Prop $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$

$x \qquad y=F(x) \qquad z=G(y)$

$$\begin{tikzcd} TX(x) \arrow[r, "dF(x)"] \arrow[rr, bend right, "d(G\circ F)(x)"'] & TY(y) \arrow[r, "dG(y)"] & TZ(z) \end{tikzcd}$$

Vale. $d(G\circ F)(x) = dG(y)\circ dF(x)$

Dem $D(Z)_z \xrightarrow{G^*} D(Y)_y \xrightarrow{F^*} D(X)_x$

Es claro que $F^*\circ G^* = (G\circ F)^*$

(asociatividad de composición de funciones)

Si $\delta \in TX(x)$, $\delta : D(X)_x \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\delta\circ(F^*\circ G^*) = \delta\circ(G\circ F)^* \underset{\text{def}}{=} d(G\circ F)(x)(\delta)$$

$$\| $$

$$(\delta\circ F^*)\circ G^* = dF(x)(\delta)\circ G^* = dG(y)\big(dF(x)(\delta)\big)$$

$$= \big(dG(y)\circ dF(x)\big)(\delta) \quad ✓$$

Cor Escribir en términos de matrices jacobianas.

Ej $(a,b)\subset\mathbb{R}$ intervalo, X variedad

$\gamma:(a,b)\longrightarrow X$ diferenciable "curva en X"

Si $c\in(a,b)$, $d\gamma(c)\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_c\right) \in TX(\gamma(c))$

"vector tangente a la curva γ en c" denotado $\gamma'(c)$

Ejercicio $\forall\, v\in TX(x)$, existe curva $(a,b)\xrightarrow{\gamma} X$, $c\in(a,b)$ tal que $v=\gamma'(c)$

Ejercicio $F: X\to Y$ diferenciable, $x\in X$, $y=F(x)$

Sea $v\in TX(x)$ y sea γ curva en X con $\gamma'(c)=v$

Entonces $dF(x)(v) = (F\circ\gamma)'(c)$ ($F\circ\gamma$ curva en Y)

(interpretación de $dF(x)$ vía curvas)

Def Sea $f: X \to Y$ diferenciable, $\dim X \leq \dim Y$.

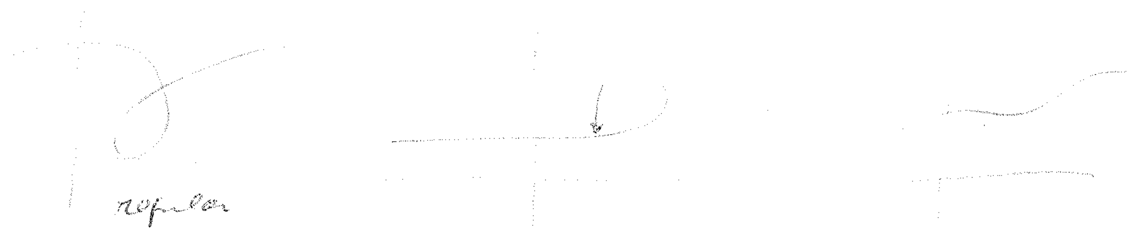
- f es regular si $df(x): TX(x) \to TY(f(x))$ es inyectiva $\forall x \in X$. (inmersión)

- ~~lo que llamamos "(X,f) submanifold"~~
~~lo vamos a llamar las "inmersión inyectiva"~~
~~(= inmersión + inyectiva)~~

- si f es regular e inyectiva diremos que (X,f) es subvariedad de Y. (submanifold)

- si además $f: X \to f(X)$ es homeo ($f(X)$ con la topología de subespacio de Y) entonces decimos que f es una inmersión de X en Y. (embedding)

Ej



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regular (inmersión) — subvariedad (submanifold) — inmersión (embedding)

Ej $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal inyectiva
$\Rightarrow f$ inmersión

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x) = (x^2, x^3)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(x,y) = x^2 + y^2, \; x^2 - y^2$
$f(x,y) = x^2 - y^3$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \mapsto (x, y, x^2+y^2)$

inmersión de Veronese, Segre.

diagonal
$\Delta: X \to X \times X$
otras diagonales

Def $f : X \to Y$ diferenciable.

$r_f(x) = \text{rango}\,(df(x) : TX(x) \to TY(f(x)))$

Prop Para cada $r \in \mathbb{N}$, sea

$$D_r = \{ x \in X \;/\; r_f(x) \le r \}$$

Entonces $D_r \subset X$ es cerrado. $(D_{r-1} \subset D_r \subset D_{r+1} \subset \cdots \subset D_n)$

Dem En coordenadas locales, $n = \dim X$

D_r viene dado por la anulación de los menores $(r+1) \times (r+1)$ de la matriz jacobiana de f.

Cor Sup. $\dim X \le \dim Y$. $X \xrightarrow{f} Y$

Entonces $U = \{ x \in X \;/\; r_f(x) = \dim X \}$

es abierto (posiblemente vacío)

Obs $f|_U : U \to Y$ es regular.

Def $f : X \to Y$ es una submersión

si $df(x) : TX(x) \to TY(f(x))$ sobreyectiva $\forall x \in X$

$(\Rightarrow \dim X \ge \dim Y)$

Cor Sup. $\dim X \ge \dim Y$

Entonces $V = \{ x \in X \;/\; r_f(x) = \dim Y \}$

es abierto (posiblemente vacío)

Obs $f|_V : V \to Y$ es submersión.

~~Ejercicios~~

Ej $\quad Y = \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\mathrm{Jac}(f) = (2x, -2y)$$

$$r_f(x,y) = 1 \qquad (x,y) \neq (0,0)$$
$$\quad = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$$

$$V = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Ej $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x \qquad$ submersión

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineal sobre $\Rightarrow$ submersión.

~~Prop (modelo local de submersiones y ...)~~

Prop $\quad f: U \to V \quad C^\infty, \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^m, \quad f(0) = 0.$

a) Si f es regular en 0 $\quad$ ($\mathrm{rg}\, df(0) = n \leq m$)
entonces $\exists$ ~~U~~ $0 \in U' \subset U, \quad 0 \in V' \subset V$
$\qquad f(U') \subset V'$

$\exists\ 0 \in U'' \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \in V'' \subset \mathbb{R}^m$

$h: U'' \to U'$, $\quad g: V'' \to V'$ $\quad$ tales que
difeo. $\qquad\qquad$ difeo.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "f"] & V' \\ U'' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}fg"'] & V'' \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$h^{-1}fg$ lineal (inyectiva) nec.

(modelo local de aplicaciones regulares)

b) Si f es submersión en 0 $\quad$ ($\mathrm{rg}\, df(0) = m \leq n$)
entonces (~~todo~~ igual) $\qquad h^{-1}fg$ lineal (sobreyectiva) nec.

Dem: función implícita.

Cor $\quad$ a) $\Rightarrow \exists$ ~~entorno~~ de 0 donde f es inyectiva

b) $\Rightarrow$ " $\qquad\qquad$ " $\qquad$ sobre

~~[illegible]~~

Recordar

Teorema de la función inversa:

$f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ diferenciable $\quad \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathcal{U}, \quad v_0 = f(x_0)$

Son equivalentes:

1) f es difeomorfismo local en x_0

$\left(\exists \underset{x_0}{\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}}, \underset{v_0}{\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}} \;/\; f: \mathcal{U}' \to \mathcal{V}' \text{ difeo.} \right)$

2) $df(x_0)$ iso. lineal $\qquad \left(\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) \neq 0 \right)$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

Teorema del rango

$\dim X = n, \quad \dim Y = m, \quad x_0 \in X$

$f: X \to Y$ diferenciable

$\varphi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$

$\psi(y_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$

Sea $r = r_f(x_0) = \text{rango } df(x_0)$

a) Existen ~~cartas~~ cartas ~~locales~~ $(\mathcal{U}, \varphi)$ de X en x_0

$(\mathcal{V}, \psi)$ de Y en $y_0 = f(x_0)$

tales que la expresión local $\psi f \varphi^{-1}$ tiene la forma:

$$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x), \dots, g_m(x))$$

b) Si $r_f(x) = r \quad \forall x \in$ un entorno de x_0 entonces

$\exists (\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi) \;/$

$$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

$(x_1, \dots, x_n) \in$ entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$

Dem Podemos suponer $0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ abierto

$0 \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ''

$X \xrightarrow{f} Y \qquad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

$\operatorname{rg} df(x_0) = r \implies \exists$ menor $r \times r$ invertible en

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right)_{i,j}$$

Renumerando las variables, puedo suponer

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}} \neq 0$$ (y todos los menores $(r+1)\times(r+1)$ tienen $\det = 0$)

Considero $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

$$d\alpha(0) = \begin{bmatrix} J & * \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$$

$I =$ identidad $(n-r)\times(n-r)$

$\det d\alpha(0) = \det J \neq 0$

$\implies$ (Teo. función inversa) $\alpha : X' \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$

difeo ($0 \in X' \subset X$ abierto)

Afirmo: $f \circ \alpha^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_r, g_{r+1}(u), \dots, g_m(u))$

En efecto: sea $u = \alpha(x)$

$f \circ \alpha^{-1}(u_1, \dots, u_n) = f(x) = (f_1(x), \dots,$

$\implies$ a) ✓

Sup. $r_f(x) = r \quad \forall x \in X$.

Puedo suponer, aplicando a1, que f está en forma normal

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x), \dots, g_m(x))$$

$$df(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & J \end{bmatrix} \qquad J = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{r+1 \leq i \leq m \\ r+1 \leq j \leq m}}$$

Afirmo. $J \equiv 0$ en un entorno de 0.

Dem: caso contrario se viola la hipótesis sobre r_f

$\Rightarrow$ cada g_i no depende de las variables x_j, $j > r$

$\Rightarrow g_i = g_i(x_1, \dots, x_r) \qquad i = r+1, \dots, m$

Defino $\beta : Y \to \mathbb{R}^m$

$$\beta(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - g_{r+1}(y), \dots, y_m - g_m(y))$$

$$d\beta(0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \Rightarrow \beta : Y \to V \text{ difeo}$$

Denotemos $(v_1, \dots, v_m)$ coordenadas en $V \subset \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_m) = \beta(y_1, \dots, y_m) \qquad v_i = y_i \quad i = 1, \dots, r$

$\qquad v_i = y_i - g_i(y), \quad i > r$.

Calculo expresión de f en coordenadas v:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \beta \\ & & V \end{array}$$

$$\beta \circ f(x) = \beta(x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x), \dots, g_m(x)) =$$

$$= (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad \checkmark$$

Cor 1 Sup. $\dim X = n \leq \dim Y = m$

$f : X \to Y$ regular en x_0 ($\operatorname{rg} df(x_0) = n$)

Entonces $\exists$ cartas locales $(U, \varphi), (V, \psi)$ /

$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

Además, f es localmente inyectiva.

Dem f regular en $x_0 \Rightarrow f$ regular en un entorno de x_0

(ver Prop. de cartas) $\Rightarrow$ $r_f = cte = n$ en un entorno de x_0

$\Rightarrow$ usar la Prop.

Además: $\psi f \varphi^{-1}$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.

Cor 2 Sup. $\dim X = n \geq \dim Y = m$

$f : X \to Y$ ~~regular~~ submersión en x_0

($\operatorname{rg} df(x_0) = m$)

Entonces $\exists$ cartas locales /

$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$

Dem hipótesis $\Rightarrow r_f = cte = m$ ✓

Def (Equivalencia de aplicaciones diferenciables)

Sean $X \xrightarrow{f} Y$, $X' \xrightarrow{f'} Y'$ diferenciables.

Decimos que f y f' son equivalentes

si $\exists$ difeomorfismos $X \xrightarrow{\sigma} X'$, $Y \xrightarrow{\tau} Y'$ /

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[d, "\tau"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd} \qquad \tau \circ f = f' \circ \sigma$$

$(\Leftrightarrow f = \tau^{-1} \circ f' \circ \sigma)$

Def

Sean $x \in X$, $x' \in X'$

Decimos que f y f' son localmente equivalentes en x, x' si $\exists$ entornos abiertos $x \in U$, $f(x) \in V$, $x' \in U'$, $f'(x') \in V'$

tales que $f|_U : U \to V$, $f'|_{U'} : U' \to V'$ son equivalentes.

Estas relaciones son de equivalencia (verificar)

Obs Dada $X \xrightarrow{f} Y$, $x \in X$

es localmente equivalente a ~~[illegible]~~ $X' \xrightarrow{f'} Y'$ $(n = \dim X,\ m = \dim Y)$. Tomar σ, τ cartas.

donde $X' \subset \mathbb{R}^n$, $Y' \subset \mathbb{R}^m$ abiertos

Problema (difícil en general): dadas f, f' determinar si son equivalentes (o localmente equivalentes)

(quiere decir: "iguales salvo cambios de coordenadas difeomorfas")

Ejemplo si f, f' son lineales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

son equivalentes $\Leftrightarrow$ tienen mismo rango

con π, σ, τ lineales

Prop Si $X \xrightarrow{f} Y$, $X' \xrightarrow{f'} Y'$ son equivalentes

~~[illegible]~~ vía σ, τ, como antes, entonces

$$r_f(x) = r_{f'}(\sigma(x)) \qquad \forall x \in X$$

Dem regla de la cadena.

Ej $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) = x^2 - y^2$

$h(x,y) = x^2 - y^3$ ¿son equiv.?

Teorema del rango constante

Sea $X \xrightarrow{f} Y$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ $\quad n = \dim X$, $m = \dim Y$.

Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) $X \xrightarrow{f} Y$ es localmente equivalente en x_0 a una aplicación lineal $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

2) $r_f : X \to \mathbb{N}$ es constante en un entorno de x_0.

Dem 1) $\Rightarrow$ 2) Si f' es lineal, $r_{f'} = \text{cte}$

Por la Prop anterior, $r_f = \text{cte}$ en un entorno de x_0.

~~2) ⇒ 1) Podemos suponer $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ abiertos.~~

~~$X \xrightarrow{f} Y$ rg $df(x) = k$, $\forall x \in X$.~~

~~Afirmo f es loc equivalente a la aplicación lineal $f' = df(x_0)$~~

2) $\Rightarrow$ 1) resulta del Teorema del rango de pág. 24

Ej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(0)=0$

Sup. f analítica (o incluso polinomial)

Si la parte lineal es no nula

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

algún $a_i \neq 0$

entonces $r_f(0) = 1 \Rightarrow f$ submersión ($r_f(x)=1$ en un entorno)

$f \sim g$ ~~sea~~ $g(x_1,\dots,x_n) = x_1$

Sup. parte lineal $= 0$

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + f_3(x) + \cdots$$

$r_f(0) = 0$ ~~Sup $r_f(x) \neq 0$ (...)~~ sup $(a_{ij}) \neq (0)$

Es verdad que $f \sim g$ donde $g(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$? (no)

$f = y^2 - x^3$ $g = y^2 - x^4$

$\boxed{\text{Prop } f \sim g \Rightarrow \text{ordo}(f) = \text{ordo}(g) \text{ y formas iniciales son } \sim}$

Def Sea X variedad, $x \in X$, $f_1,\dots,f_m : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(x \in \mathcal{U})$

~~...~~

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ $f = (f_1,\dots,f_m)$ ~~...~~

~~...~~

(= f submersión en x) ~~...~~ en un entorno de x

~~**Prop** Si $f_1,\dots,f_m$ son independientes en x entonces $\exists$ carta $(\mathcal{U},\varphi)$ de X en x tal que $\varphi_1 = f_1, \dots, \varphi_m = f_m$ (las f_i son parte de un sistema de coordenadas)~~

~~**Dem** Por el Teo. del rango $\exists$ $(\mathcal{U},\varphi)$ tal que la expresión local de f es~~

~~**Prop** Sup. $r_f(x) = m$~~

~~a) Si $m = \dim X$ entonces $f_1,\dots,f_m$ carta en entorno de x~~

~~b) Si $m < \dim X$ " parte de carta~~

~~c) Si $m > \dim X$ " contienen carta~~

~~(b) $\exists$ $f_{m+1},\dots,f_n$ / $n = \dim X$ / $f_1,\dots,f_n$ carta~~

e)

$\longrightarrow$

SUBVARIEDADES

Ej: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$

sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = 0\} = (f=0)$

Sup. $X \cap \left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0\right) \cap \left(\frac{\partial f}{\partial y} = 0\right) = \emptyset$

$\mathcal{U} = X \cap \left(\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0\right) \qquad \mathcal{V} = X \cap \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$

Teo. función implícita:

si $(x_0,y_0) \in X$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$\exists\ y = g(x)$ g $\mathcal{C}^\infty$ en entorno de x_0

$f(x, g(x)) = 0$

$(x,y) \longmapsto x$ carta en (x_0,y_0)

si también $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$

$\exists\ x = h(y)$ h $\mathcal{C}^\infty$ en y_0

$\rightsquigarrow$ otra carta.

Funciones de transición entre estas cartas son

$y = g(x)$
$x = h(y)$ ambas $\mathcal{C}^\infty$ $\rightsquigarrow$ tenemos atlas en X.

($\dim X = 1$)

~~X C^∞~~

Ej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $X = (f=0)$

sup $X \cap \bigcap_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\right) = \emptyset$

Teo. func. impl. $\rightsquigarrow$ atlas en X

$\dim X = 2$

Ej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $X = (f=0)$

Sup. $\operatorname{rg} df(x) = 2$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ (Teo func. impl.) tiene un atlas en X ($\dim X = 1$)

Mas en general,

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad X = (f=0)$$

Sup. $\operatorname{rg} df(x) = m \leq n \quad \forall x \in X$

$\to$ teo. func. impl. da atlas en X, $\dim X = n-m$

Decimos que X es la subvariedad de $\mathbb{R}^n$ definida por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\}$$

Obs si $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto

$X = (f=0) \subset \mathcal{U}$, $\operatorname{rg} df(x) = m$, $x \in X$

$\Rightarrow$ atlas en X.

Obs Sup. $f: \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ abierto

$X = (f=0) \subset \mathcal{V}$

Sup. $\{x \in X \mid \operatorname{rg} df(x) < m\} = X' \subsetneq X$

(X' es cerrado, sup. no es todo X)

Entonces $X - X'$ es variedad.

Dem Aplicar la obs. anterior con $\mathcal{U} = \mathcal{V} - X'$

Ej $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$X = \text{cono} = (x^2+y^2 = z^2)$

Ej $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{U} = (Jf \neq 0)$

$X = (f=0) \cap \mathcal{U}$ variedad

Recordar:

$f : X \to Y$

subvariedad paramétrica (cambio de terminología)

si f regular + f inyectiva

inmersión si además $f : X \to f(X)$ homeo
($f(X) \subset Y$ subespacio top.)

Def $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y$ son equivalentes
($f \equiv f'$) si $\exists\, g : X \to X'$ difeo / $f = f' \circ g$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ X' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Obs $f \equiv f'$
f inmersión $\Rightarrow$ f' inmersión

Obs Si $f : X \to Y$ es subvariedad paramétrica
dotemos a $f(X) = X'$ de estructura de variedad
vía la biyección $f : X \to f(X)$
Entonces $f \equiv f'$ donde $f' : X' \to Y$
es la inclusión.

$\Rightarrow$ toda $f : X \to Y$ es $\equiv$ a una $f' : X' \hookrightarrow Y$ inclusión
$X' \subset Y$

Pero ojo: la topología de X' no es la de subespacio de Y.

Si f es inmersión entonces $f' =$ inclusión es inmersión.

Ej $Y = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$$\begin{tikzcd} X = \mathbb{R} \arrow[r, "\ell"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

ℓ lineal
π proyección

$\ell(t) = (at, bt)$ $\quad \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ f subvariedad paramétrica
f no es inmersión
($\operatorname{im} f \subset Y$ denso)

Def Sea ~~X~~ Y una variedad.

Una <u>subvariedad</u> inmersa de Y es un subconjunto $X \subset Y$ tal que X es variedad(*) y ~~tal~~ $i : X \to Y$ (inclusión) es inmersión

($\Rightarrow$ la topología subyacente a la variedad X coincide con la topología de subespacio de Y)

(*) o sea, X está provisto de una estructura de variedad.

<u>Ej</u> $Y = \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $m < n$

$r_f = m$ en $U \subset \mathbb{R}^n$ $X = U \cap (f = 0)$

$\Longrightarrow$ $X \subset Y$ subvariedad de dim $= n - m$

<u>Obs</u> Sea Y una variedad, $X \subset Y$ subconjunto.

Puede suceder

1) que ~~X~~ no exista estructura de variedad en X tal que $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ sea inmersión ~~subvariedad~~.

2) que exista más que una tal estructura en X. (el <u>ocho</u>)

Pero vale: <u>Prop</u>

Sea ~~X~~ Y una variedad, $X \subset Y$ subconjunto.

Fijemos una ~~topología~~ $\mathcal{T}$ en X.

Entonces existe a lo sumo una estructura de ~~var~~ variedad en X tal que $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ es inmersión.

Dem Warner ~~...~~ 1.31 - 1.33

(de dim m)

Prop 8 Sea Y una variedad, sea $X \subset Y$ un subconjunto. Sea $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto tal que $X_i = X \cap U_i \subset U_i$ es subvariedad ~~cerrada~~ (de dim m). Entonces $X \subset Y$ es subvariedad (de dim m).

Dem Quiero dotar a X de estructura de variedad, con top. de subespacio. Cada X_i tiene estructura de variedad (tal que $X_i \hookrightarrow U_i$ subvariedad inmersa)

$$X_i \cap X_j \subset X_i \text{ es abierto}$$
$$\| $$
$$X_i \cap U_j$$

$X_i \cap X_j$ tiene 2 estructuras de variedad, la inducida por X_i y la inducida por X_j. Por la Prop. anterior, estas dos estructuras coinciden
(dicho de otro modo: sea $\mathcal{A}_i$ un atlas en X_i
en X_{ij} tengo $\mathcal{A}_i|_{X_{ij}}$ y $\mathcal{A}_j|_{X_{ij}}$
Prop $\Rightarrow$ son ~~compatibles~~ atlas equivalentes)

Esto define una estructura de variedad en X. La topología en X inducida por este atlas es la de subespacio, ya que esto es verdad en cada X_i.
También, la inclusión $X \to Y$ es diferenciable, ya que cada $X_i \to Y$ es diferenciable.

Def Sea $f: X \to Y$ diferenciable

$n = \dim X$, $m = \dim Y$, $m \leq n$.

Para $x \in X$, decimos que x es un punto *regular* para f si $r_f(x) = m$

($\iff$ f es submersión en x)

Si x no es regular para f ($r_f(x) < m$)

entonces decimos que x es un *punto crítico de f*

Obs El conjunto de puntos regulares de f es abierto en X, posiblemente vacío.

Def Decimos que $y \in Y$ es un *valor crítico de f*

si $\exists\, x \in X$ / $y = f(x)$
x punto crítico de f.

Si $y \in Y$ no es valor crítico, decimos que y es *valor regular* (todo $x \in f^{-1}(y)$ es regular)

Ej $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0,\ i = 1, \dots, n \}$ = puntos críticos de f.

Prop Sea $f: X \to Y$ diferenciable

$n = \dim X$ y $m = \dim Y$.

Sea $y_0 \in Y$ un valor regular de f.

Entonces $f^{-1}(y_0) \subset X$ es subvariedad de dimensión $n-m$.

~~De Sea $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, $\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^n$~~

~~$Y = \bigcup_{j \in J} V_j$, $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^m$~~

~~cubiertas con cartas coordenadas~~

~~tales que $f(U_i) \subset V_{j(i)}$~~

Dem

1) Puedo suponer $Y = \mathbb{R}^m$, $y_0 = 0$

En efecto, sea $\psi: V \to \mathbb{R}^m$ una ~~ab~~ carta en Y

tal que $y_0 \in V$, $\psi(y_0) = 0$.

Sea $U = f^{-1}(V) \subset X$ abierto.

Considero $f|_U : U \to V$

$f^{-1}(y_0) = (f|_U)^{-1}(y_0)$

Además,
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f|_U"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & V \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad g = \psi \circ (f|_U)$$

$g^{-1}(0) = (f|_U)^{-1}(y_0)$

2) Sea entonces $f: X \to \mathbb{R}^m \ni 0$

Sea $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ $\quad \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ cartas

$$f^{-1}(0) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(0) \cap U_i$$

Por Prop. anterior, basta con ver que cada

$f^{-1}(0) \cap U_i$ es variedad (de dim $n-m$)

$= f_i^{-1}(0)$ $\quad f_i = f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}^m$

Práctica:
Espacio $\mathbb{R}$. a $\mathbb{P}^n$
" " Grass.
" " variedad dada por ecuaciones en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R}^m \\ \varphi_i \downarrow & \nearrow & \\ V_i = \varphi_i(U_i) & f_i \circ \varphi_i^{-1} = g_i & \end{array}$$

$g_i : V_i \to \mathbb{R}^m$ es como los ejemplos del principio $\Rightarrow$ ~~...~~ $g_i^{-1}(0)$ tiene estructura de variedad (usando TFI)

~~...~~

Como $f_i^{-1}(0) = \varphi_i^{-1}(g_i^{-1}(0))$ puedo transportar el atlas por tempo. en $g_i^{-1}(0)$ a $f_i^{-1}(0)$ vía φ_i^{-1}. $\square$

Ej $f : X \to \mathbb{R}$ $\dim X = n$.

Si $t_0 \in \mathbb{R}$ es valor regular,

$f^{-1}(t_0) \subset X$ es subvariedad de dim $n-1$

~~...~~

<u>Def</u> Sea X una variedad, $\dim X = n$.

Una <u>hipersuperficie</u> en X es una subvariedad $S \subset X$ con $\dim S = n-1$.

El ejemplo nos da un tipo de hipersuperficie $S = f^{-1}(t_0)$.

(*) Práctica ~~...~~

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i^d$ $f^{-1}(1)$ Hipersuperficie de Fermat

b) $\mathbb{R}^{n\times n} \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$ calcular puntos críticos S, $f^{-1}(0) - S =$ matrices de rango $n-1$ hipersuperficie.

c) $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ $f(A) = A \cdot A^t$ $f^{-1}(I) = O(n, \mathbb{R})$

Otro ejemplo de hipersuperficie:

$\mathbb{R}^{n\times n} \to \{\text{matrices simétricas}\}$

<u>Ej</u> Sea $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ C^∞ homogénea de grado d.

$F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$ P. ej. $F = \sum_{|\alpha| = d} a_\alpha x^\alpha$ polinomio de grado d.

$a_\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$

$S = (F=0) = \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \;/\; F(x_0, \dots, x_n) = 0 \}$

Sea $U_i = \{ x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \;/\; x_i \neq 0 \}$

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\varphi_i (x_0 : \dots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$

carta

~~Afirmo~~

Decimos que F es __no-singular__ si

$\sigma(F) = \{ x \in \mathbb{P}^n \;/\; \frac{\partial F}{\partial x_0}(x) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \} = \emptyset$

Afirmo: si F es no-singular entonces $(F=0) \subset \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie.

Dem: basta con ver que $(F=0) \cap U_i$ es hipersuperficie. Defino $f_i(y_1, \dots, y_n) = F(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n)$ verifican:

1) $\varphi_i((F=0) \cap U_i) = (f_i = 0)$

2) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 0 es valor regular.

... (completarlo en la práctica).

* Práctica $\longrightarrow$

Subvariedades de variedades analíticas reales y de variedades holomorfas.

1) TFI analítico real / analítico complejo — ver Cartan.

2) $f: U \to \mathbb{R}^m$ analítica real $(U \subset \mathbb{R}^n)$ $m \le n$

$X = (f=0)$, $r_f(x) = m$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ X es variedad analítica real, $\dim X = n-m$

($\Leftrightarrow$ subvariedad analítica de $\mathbb{R}^n$)

3) $f: U \to \mathbb{C}^m$ analítica compleja $(U \subset \mathbb{C}^n)$

$X = (f=0)$, $r_f(x) = m$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ X variedad holomorfa

$\dim_{\mathbb{C}} X = n-m$

Ej $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$X = (f=0)$, $r_f(x) = 1$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ X var. hol. de $\dim_{\mathbb{C}} = 1$

---

* Práctica: $F: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ holomorfa homogénea de grado d.

$X = (F=0) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Sup. $\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0\right) \cap \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0\right) \cap \dots \cap \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\right) = \emptyset$ (en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)

$\Rightarrow$ X es variedad holomorfa de $\dim_{\mathbb{C}} = n-1$

Caso $n=2$ ejemplos

Enunciar sin dem

Teo 1 $F(x_0, x_1, x_2)$ hom. grado d con coef. $\mathbb{C}$

$X = (F=0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ X es una variedad diferencial, conexa, de género de dim 2,

$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Ojo en el caso real X no es nec. conexo
número de componentes ??

Sea X var. $\mathcal{C}^\infty$ de dim n

$S \subset X$ subconjunto

~~...~~

$(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de X, ~~...~~ $\mathcal{U} \cap S \neq \emptyset$

Def La carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ está adaptada a S

si $\varphi(\mathcal{U} \cap S) = \varphi(\mathcal{U}) \cap L$

donde $L \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal.

Def $S \subset X$ es una subvariedad de dimensión d si existen cartas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ $(i \in I)$ de X tales que

1) $S = \bigcup_{i \in I} S \cap \mathcal{U}_i$

2) $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap S) = \varphi_i(\mathcal{U}_i) \cap L_i$

$L_i \subset \mathbb{R}^n$ variedad lineal de dim d, $\forall i \in I$.

Obs: Puedo suponer $L_i = \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ $\forall i$ $\mathbb{R}^d = \{(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)\}$ (componiendo con iso afín.)

Prop Si $S \subset X$ es subvariedad de dim d entonces S hereda de X una estructura natural de variedad $\mathcal{C}^\infty$ de dim d.

Con respecto a esta estructura, la inclusión $i: S \to X$ es una inmersión.

Dem: ejercicio. (Para cada carta adaptada $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$, $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap S) = \varphi_i(\mathcal{U}_i) \cap \mathbb{R}^d$ definir $\mathcal{U}_i' = \mathcal{U}_i \cap S$, $\mathcal{V}_i' = \varphi_i(\mathcal{U}_i) \cap \mathbb{R}^d$ $\varphi_i': \mathcal{U}_i' \to \mathcal{V}_i' \subset \mathbb{R}^d$ es atlas de S)

Nota: cambio de terminología: $f: X \to Y$ regular + inyectiva lo llamo "subvariedad paramétrica"

<u>Teorema</u> (rango constante - subvariedades)

Sea $f: X^m \to Y^n$ / r_f es constante $= r$

Entonces para todo $y \in Y$

$S = f^{-1}(y) \subset X$ es una subvariedad

de dimensión $m-r$

<u>Dem</u> Sea $x \in S$

Por el Teo. del rango cte.

$\exists$ cartas (U, φ) de X, $\varphi(x) = 0$

(V, ψ) de Y, $\psi(y) = 0$ $\qquad f(U) \subset V$

tales que $f' = \psi f \varphi^{-1} : U' \to V'$

$(u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0)$

$f'^{-1}(0) = \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_1 = \dots = u_r = 0\} = L$

es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^m$ de dim $= m-r$

Además es claro que

$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap L$

$\Rightarrow$ (U, φ) es adaptado a S

$\Rightarrow$ para todo $x \in S$, $\exists$ (U, φ) adaptado a S con $x \in U$

$\Rightarrow$ S es variedad de dim $m-r$.

Prop

Obs 1 Dada $f: X \to Y$

sea $r = \max\{r_f(x),\ x \in X\}$

~~sea $D_r(X) = \{x \in X$~~

$\Rightarrow X' = \{x \in X \ / \ r_f(x) = r\} \subset X$ es abierto

y $f|_{X'} : X' \to Y$ tiene rango cte $= r$

$\to$ puedo aplicar el Teo a $f|_{X'}$.

Obs 2 En particular, sup. $m \geq n$

y sup. $y \in Y$ es valor regular

(i.e. no es valor crítico, i.e. $r_f(x) = n \quad \forall x \in f^{-1}(y)$)

Entonces $f^{-1}(y) \subset X$ es subvariedad de

dim $m-n$

Dem Usar Obs 1 con $r = n$.

Ejemplos

1) $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f_i : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$, $i = 1, \dots, n$ ($n \leq m$)

$f : U \to \mathbb{R}^n \qquad f = (f_1, \dots, f_n)$

sup. $0 \in \mathbb{R}^n$ valor regular de f

(o sea, $\text{rango}\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = n, \quad \forall x \in f^{-1}(0)$)

Entonces $f^{-1}(0) \subset U$ es variedad $\mathcal{C}^\infty$, de dim $m-n$.

Casos particulares:

$n = 1 \quad (m = 2, 3, \text{etc.})$

$m = 3, \quad n = 2, \quad \dots$

Def Variedad algebraica en $\mathbb{R}^m$.

Puntos singulares, regulares.

Ej - intersección de cuádricas.

- superficies cúbicas, etc.

- curvas algebraicas en $\mathbb{R}^2$.

2) Grupo ortogonal

$$O(n,\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;/\; A.A^t = I \}$$

Afirmo: es variedad C^∞ de dim $= \frac{n^2-n}{2}$

Considero $f: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{simétricas}}$

$$A \longmapsto A.A^t$$

$f^{-1}(I) = O(n,\mathbb{R})$

Quiero ver: f tiene rango de $=$ ~~cte~~ $\frac{n^2+n}{2}$

en un entorno de $f^{-1}(I)$

Calculo $df(A)$

$$f(A+tB) = (A+tB).(A+tB)^t = (A+tB).(A^t+t.B^t)$$

$$= A.A^t + t.(A.B^t + B.A^t) + t^2.(\quad)$$

$df(A): \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{simétricas}}$ lineal

$df(A)(B) = A.B^t + B.A^t$

Afirmo: $I \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{simétricas}}$ es valor regular

Dem Supongo $A \in f^{-1}(I)$ $\quad (A.A^t = I)$

y quiero ver que $df(A)$ es epi.

Dado C matriz simétrica, quiero escribirla

como $C = AB^t + BA^t$ $\quad$ (A fija, busco B)

Basta con tomar $\frac{C}{2} = AB^t$ $\quad \left(\Rightarrow \frac{C^t}{2} = BA^t \Rightarrow C = \frac{C+C^t}{2} = AB^t + BA^t \right)$

$\Leftrightarrow A^{-1}\frac{C}{2} = B^t \Leftrightarrow \underline{B = C A^{-1\,t}}$

~~cllxx~~

Obs Mismo argumento: $df(A)$ epi $\forall A$ inversible

(¿cómo calcular $r_f(A)$ para A no-inversible ?)

Prop Mismas condiciones que en el Teo:

$f : X^m \to Y^n \qquad r_f = cte = r$

$\boxed{\text{ver pg. 41}}$

$S = f^{-1}(y)$ sub-variedad de dim $m - r$

Entonces, para cada $x \in S$

$$TS(x) = \ker\left(df(x) : TX(x) \to TY(y) \right)$$

Dem $\quad S \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \qquad f \circ i = cte$

$$TS(x) \xrightarrow{di(x)} TX(x) \xrightarrow{df(x)} TY(y) \qquad df(x) \circ di(x) = d(cte) = 0$$

$\Rightarrow \quad TS(x) \subset \ker df(x)$

$\dim TS(x) = \dim S = m - r$

rango $df(x) = r \quad \Rightarrow \quad \dim \ker df(x) = m - r \quad \Rightarrow$ vale $=$

Ej $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$S = f^{-1}(0) = \{ x \in \mathbb{R}^m \,/\, f(x) = 0 \}$$

$$TS(x) = \ker df(x) = \{ y \in \mathbb{R}^m \,/\, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot y_i = 0 \}$$

Ej $\quad A \in O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(I) \qquad f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{simétricas}}$

Espacio ~~tang~~ tangente a $O(n,\mathbb{R})$ en A

$= \ker df(A) = \{ B \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, A \cdot B^t + B \cdot A^t = 0 \}$

Para $A = I \in O(n, \mathbb{R})$, espacio tg. es

$\{ B \,/\, B^t + B = 0 \} =$ matrices anti-simétricas.

$\Rightarrow$ (regla de la cadena) $\quad dg(x) \circ di(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \operatorname{im} di(x) \subset \ker dg(x)$

Afirmo: ambos subespacios de $TY(x)$
tienen dim $= n-m$
$\Rightarrow$ son iguales.

$\dim \operatorname{im} di(x) = \dim di(x) = \dim X = n-m$

$\dim \ker dg(x) = \dim TY(x) - \dim \operatorname{im} dg(x)$

$= \dim TY(x) - \dim TZ(z_0)$ (z_0 regular para g)

$= \dim Y - \dim Z$

$= n-m$ ✓

Ej $\quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad m \leq n \quad g = (g_1, \dots, g_m).$

$z_0 \in \mathbb{R}^m$ valor regular de g

$X = g^{-1}(z_0) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, g_i(x) = z_0, \ i = 1, \dots, m \}$

$\Rightarrow$ el espacio tangente immerso de $X \subset \mathbb{R}^n$ en x es

$\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \cdot y_j = 0, \ i = 1, \dots, m \}$

p. ej. si $m = 1$

$X = (g = 0) \qquad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(TX(x) \subset \mathbb{R}^n) = \{ (y_1, \dots, y_n) \,/\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, y_i = 0 \}$

Práctica: "espacio ~~proy~~ proyectivo tangente para $X \subset \mathbb{P}^n$"

Campos de vectores

Def Sea X una variedad.
Un campo de vectores v en X consiste de
un vector tangente $v(x) \in TX(x)$ para cada $x \in X$.
Mas precisamente, denotamos TX al conjunto
unión disjunta de los $TX(x)$ para $x \in X$

$$TX = \coprod_{x \in X} TX(x) = \{(x,v) \mid x \in X,\ v \in TX(x)\}$$

Sea $\pi : TX \to X$ tal que $\pi(TX(x)) = \{x\}$
Entonces, es un campo de vectores en X es una
función $v : X \to TX$ tal que $\pi \circ v = id_X$
(v es una sección de π)

~~[illegible]~~
Si $\mathcal{U} \subset X$ es un abierto, $\mathcal{U}$ ~~[illegible]~~ es variedad
y podemos asimismo considerar campos de
vectores en $\mathcal{U}$, $v : \mathcal{U} \to T\mathcal{U} = \pi^{-1}\mathcal{U}$ $\left(T\mathcal{U}(x) = TX(x) \atop x \in \mathcal{U} \right)$

Ej Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una carta de X.
Para cada $x \in \mathcal{U}$, tenemos los vectores tangentes

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x \in TX(x) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x (f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

Denotamos $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ el campo de vectores en $\mathcal{U}$

tal que $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(x) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x$

También, si $a_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ son funciones

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ es un campo de vectores en $\mathcal{U}$.

Sea $v : X \to TX$ un campo de vectores

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es carta de X

$v/\mathcal{U} : \mathcal{U} \to T\mathcal{U}$

se escribe en la base $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}$

$$v/\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \qquad a_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

(porque $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x$ es base, $\forall x \in \mathcal{U}$)

Si $(\mathcal{V}, \psi)$ es otra carta,

$$v/\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial \psi_j}$$

En $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ vale

$$\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \psi_j} = \circledast$$

$a_i = a_i/\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

Además, las dos bases se relacionan

$$\frac{\partial}{\partial \psi_j} = \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$$

$$\circledast = \sum_j b_j \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j} b_j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_i\big|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j} \cdot b_j\big|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}} \quad \text{en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$$

Si $X = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ $\quad \varphi^\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}^n$ cartas

sea $v : X \to TX$ campo de vectores

① $$v/\mathcal{U}_\alpha = \sum_i a_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_i^\alpha} \qquad a_i^\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

entonces

(2) $$a_i^\alpha = \sum_j \frac{\partial \varphi_i^\alpha}{\partial \varphi_j^\beta} \cdot a_j^{\alpha\beta} \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta$$

Recíprocamente, un cubrimiento por cartas $(U_\alpha, \varphi^\alpha)$ y una colección de funciones $a_i^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de compatibilidad (2) define un campo de vectores $v : X \to TX$ a través de (1).

Def Sea $v : X \to TX$ un campo de vectores en X. Para cada $f : X \to \mathbb{R}$ diferenciable definimos $v(f) : X \to \mathbb{R}$ como

$$v(f)(x) = v(x)(f_x) \in \mathbb{R}$$

(recordar $v(x) : D_x \to \mathbb{R}$
f_x = germen de f en x)

~~De esta manera, el campo de vectores induce una función~~

~~$\tilde{v} : D(X, \mathbb{R}) \to D(X, \mathbb{R})$~~
~~$f \longmapsto$~~

Def El campo de vectores $v : X \to TX$ es diferenciable si $\forall U$ $\forall f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, $v(f) : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Obs Si $v: X \to TX$ es diferenciable

entonces v induce

$$\tilde{v}: D(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow D(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \qquad \forall \mathcal{U} \subset X$$
$$f \longmapsto v(f)$$

Prop: $\tilde{v}$ es una derivación: $\tilde{v}(f \cdot g) = f \cdot \tilde{v}(g) + g \cdot \tilde{v}(f)$, $\tilde{v}$ $\mathbb{R}$-lineal

Prop Sea $v: X \to TX$ un campo de vectores.

Son equivalentes:

a) v es diferenciable

b) Existe un cubrimiento por abiertos coordenados

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha \qquad \varphi^\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}$$

tal que en las expresiones

$$v|_{\mathcal{U}_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_i^\alpha}$$

las funciones $a_i^\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

c) La afirmación b) vale para todo cubrimiento por abiertos coordenados.

Dem

a) $\Rightarrow$ c) $\quad a_i^\alpha = v(\varphi_i^\alpha)$

c) $\Rightarrow$ b) ✓

b) $\Rightarrow$ a) dada $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, quiero ver $v(f): \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dif.

Basta con ver que $v(f)|_{\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}}$ es diferenciable, $\forall \alpha$.

$$v(f)|_{\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}} = v(f|_{\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}}) = \sum_i a_i^\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi_i^\alpha} : \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}$$

Esta última es diferenciable ✓.

Obs Similarmente reemplazando "diferenciable" por "holomorfo" o "analítico real"

Sea X una variedad de dimensión n.

Vamos a definir en el conjunto TX una estructura de variedad de dimensión $2n$.

Sea $\mathcal{U}\subset X$, $\varphi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una carta de X.

$\pi: TX\longrightarrow X$

Topología en TX: base de abiertos ~~$\varphi'^{-1}(\ldots)$~~ $\varphi'^{-1}(A\times B)$, $A\subset\varphi(\mathcal{U})$, $B\subset\mathbb{R}^n$ abiertos

Es la topo. inducida por el atlas que estamos definiendo?

Defino carta $\varphi': \pi^{-1}(\mathcal{U})\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}$

Para $x\in\mathcal{U}$, $\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right|_x,\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right|_x$ base de $TX(x)$

Defino $\varphi'(x,v) = (\varphi(x), v(\varphi_1),\ldots,v(\varphi_n))\in\mathbb{R}^{2n}$

o sea, si $v=\sum a_i\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right|_x$

$$\varphi'(x,v) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x), a_1,\ldots,a_n)$$

Notar: $\operatorname{im}(\varphi') = \operatorname{im}\varphi\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2n}$

Ej $X=f^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^n$
$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$
$TX=\{(x,y)\,/\,df(x)\cdot y=0\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$
subvariedad inmersa

Sean $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\mathcal{V},\psi)$ dos cartas de X.

Afirmo que φ', ψ' son compatibles.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\pi^{-1}(\mathcal{V}) = \pi^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\
\varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi'\circ\varphi'^{-1}"'] & & \psi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\times\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$\varphi'^{-1}(y_1,\ldots,y_n,a_1,\ldots,a_n) = \left(\varphi^{-1}(y), \sum a_i\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\right|_x\right)\qquad x=\varphi^{-1}(y)$$

$$\psi'\circ\varphi'^{-1}(y,a) = \left(\psi(\varphi^{-1}(y)), \sum_i a_i\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi_i}\right|_x,\ldots,\sum_i a_i\left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\varphi_i}\right|_x\right)$$

es función $\mathcal{C}^\infty$ ✓

Se puede escribir:

$$\psi' \circ \varphi'^{-1}(y,a) = \left(\psi\circ\varphi^{-1}(y),\ d(\psi\circ\varphi^{-1})(y)(a)\right)$$

Obs X var. analítica (holo) $\Rightarrow$ TX

Prop Sea $v: X \to TX$ un campo de vectores

Son equivalentes

a) v es diferenciable (según la def. anterior)

b) v es función diferenciable $X \to TX$

Dem Sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de X

$(\pi^{-1}\mathcal{U}, \varphi')$ la correspondiente carta de TX

Como $\pi \circ v = id_X$, $v: \mathcal{U} \to \pi^{-1}\mathcal{U}$

Calculo la expresión local de v en estas cartas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi^{-1}\mathcal{U} \arrow[d, "\varphi'"] \\
\varphi(\mathcal{U}) \arrow[r, "v'"'] & \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$v(x) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$, $x \in \mathcal{U}$

a) $\Leftrightarrow$ cada $a_i: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es diferenciable

$v' = \varphi' \circ v \circ \varphi^{-1}$

$$v'(y) = \varphi' \circ v(\varphi^{-1}(y)) = \left(\varphi(v(x))\pi,\ \varphi'\left(\sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right)\right)$$

$x = \varphi^{-1}(y)$

$$= (\varphi(x), a_1(x), \dots, a_n(x))$$

$$= (y, a_1(\varphi^{-1}(y)), \dots, a_n(\varphi^{-1}(y)))$$

v' $\mathcal{C}^\infty$ $\Leftrightarrow$ cada $a_i \circ \varphi^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ $\Leftrightarrow$ cada $a_i: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. ✓

Prop Sea $f: X \to Y$ una aplicación diferenciable. Entonces la aplicación $df: TX \to TY$ definida por $df(x, v) = (f(x), df(x)(v))$ es diferenciable.

(Recordar: para cada $x \in X$ tenemos

$$df(x): TX(x) \longrightarrow TY(f(x)) \quad \text{lineal}$$

Esto induce una aplicación "unión disjunta"

$$df: TX \to TY \;)$$

Dem Sean $(\mathcal{U}, \varphi)$ coordenadas en X

$(\mathcal{V}, \psi)$ " " Y

tales que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$

Entonces $df(\pi^{-1}\mathcal{U}) \subset \pi^{-1}\mathcal{V}$

Calculo expresión de df en coordenadas locales

$$df(x, v) = df\left(x, \sum a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x\right) = \left(f(x), df(x)\left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x\right)\right)$$

$$= \left(f(x), \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial \varphi_i}\Big|_x \frac{\partial}{\partial \psi_j}\Big|_{f(x)}\right) \quad f_j = \psi_j \circ f$$

$$= \left(f(x), \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \varphi_i}\Big|_x \cdot a_i\right) \frac{\partial}{\partial \psi_j}\Big|_{f(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{expresión local de } df} \psi(\mathcal{V}) \times \mathbb{R}^m$$

$$(y, a) \longmapsto (g(y), dg(y)(a))$$

$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ expresión local de f

$\Rightarrow$ ~~f~~ df diferenciable.

Obs Para $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

vale $TX \xrightarrow{df} TY \xrightarrow{dg} TZ \qquad dg \circ df = d(g \circ f)$

ya que para cada $x \in X$ vale regla de la cadena.

Obs

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi"'] & TY \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Def Sea $S \xrightarrow{f} X$ una subvariedad paramétrica.

Un campo de vectores en X definido a lo largo de (S,f)

es una aplicación diferenciable $v : S \to TX$

tal que

$$\begin{tikzcd} & TX \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ej $S = (a,b) \subset \mathbb{R}$

campo de vectores definido a lo largo de una curva paramétrica.

Si v se factoriza

$v = df \circ u$

$$\begin{tikzcd} TS \arrow[r, "df"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & TX \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[u, shift right, "u"'] \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces decimos que "v es tangente a S".

Def Sea $v \in \Gamma T(X)$ un campo de vectores en X. Una curva integral de v

es una curva paramétrica $\sigma : (a,b) \to X$
diferenciable

tal que $\dot{\sigma}(t) = v(\sigma(t)) \quad \forall t \in (a,b)$

Ej Sup. $X = \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad a_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^\infty$$

curva integral: $(a,b) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{U}$

$$\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_i a_i(\sigma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t)}$$

$\iff$

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \qquad i = 1, \dots, n$$

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias
(incógnita = curva integral) de orden uno.

Teorema Sea X una variedad y $v \in \Gamma T(X)$
Para cada $x \in X$ existe un intervalo abierto
$I_x = (a(x), b(x)) \subset \mathbb{R}$ $\quad (a(x), b(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$
y una curva $\gamma_x : I_x \to X$ tal que

1) $0 \in I_x$, $\gamma_x(0) = x$
2) γ_x es curva integral de v.
3) si $\mu : (a,b) \to X$ satisface 1), 2)

entonces $(a,b) \subset I_x$, $\mu = \gamma_x|_{(a,b)}$
(maximalidad de I_x y unicidad de γ_x)
Dem Teo. $\exists!$ ODE (ver Warner)

Def Se dice que v es completo si

$I_x = \mathbb{R} \quad \forall x \in X$

Teo Sea v completo.

Definimos una aplicación

$$\bar{v} : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$
$$(t, x) \longmapsto \gamma_x(t)$$

("flujo inducido por v")

Entonces:

1) $\bar{v}$ es diferenciable

2) $\bar{v}$ es una acción del grupo $(\mathbb{R},+)$ en X

o sea, si denotamos $\bar{v}(t,x) = t \cdot x$ vale

a) $0 \cdot x = x$

b) $(t_1 + t_2) \cdot x = t_1 \cdot (t_2 \cdot x)$

Para $t \in \mathbb{R}$, sea

$f_t : X \longrightarrow X$

$f_t(x) = \gamma_x(t)$

Entonces

1) f_t es diferenciable, $\forall t \in \mathbb{R}$

2) $f_{t_1} \circ f_{t_2} = f_{t_1 + t_2}$

($\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Dif}(X)$, $t \longmapsto f_t$ morfismo de grupos)

$f_t^{-1} = f_{-t}$, $f_0 = id_X$

(grupo a un parámetro de difeomorfismos de X inducido por v)

Dem ver Warner (TEMA)

(con enunciado para v no nec. completo)

Prop (Práctica) X compacta, $v \in \Gamma T(X)$

$\Rightarrow$ v completo.

Ej 2 $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ (toro)

$\mapsto$ ecuaciones diferenciales con coeficientes bi-periódicos

Ej 1 $X = S^2$

Teorema de Poincaré

X variedad, $v \in \mathcal{M}T(X)$

Para cada $x \in X$ / $v(x) = 0 \in TX(x)$

se define $i(v,x) \in \mathbb{Z}$ (índice de v en x)

(ver Spivak)

Sup. X compacta (orientable) y $Z(v) = \{x \in X / v(x) = 0\}$ finito

Entonces $\displaystyle\sum_{x \in Z(v)} i(v,x) = \chi(X)$ = característica de Euler de X

(no depende de v)

Ej

Si $X = T_g$ entonces $\chi(X) = 2-2g$

$X = S^2$ $\quad \chi(X) = 2$

$X = T_1$ $\quad \chi(X) = 0$ etc.

Cor Si $g \neq 1$, $\forall v \neq 0$
$Z(v) \neq \phi$
En part., T_g $(g \neq 1)$
no es paralelizable

Obs Si $v \in \mathcal{M}T(X)$ es "genérico"

entonces $Z(v)$ es finito y $i(v,x) = \pm 1$ $\forall x \in Z(v)$

PRACTICA

$v \in \mathcal{M}T(X)$

$\tilde{v} : D(X, \mathbb{R}) \to D(X, \mathbb{R})$ $\quad \tilde{v}(f)(x) = v(x)(f_x)$

es una derivación (definir derivación)

$\mathcal{M}T(X) \longrightarrow \Delta(X) =$ Derivaciones $(D(X,\mathbb{R}) \to D(X,\mathbb{R}))$

$v \longmapsto \tilde{v}$ inyectiva? sí
sobre? sí (ver Godbillon)

Campos de co-vectores (1-formas diferenciales) p. 65

Algebra multilineal – tensores

(en Practica)' pasan a pág. 65

Sea K un cuerpo (anillo conmutativo, anillo)

p. ej. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Consideramos K-espacios vectoriales de dim ∞

aunque mucho de lo que sigue (no todo)

vale para K-módulos arbitrarios.

Si $V_1, \dots, V_n, U$ son K-e.v.

una aplicación

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow U$$

es n-multilineal$/_K$ si ...

$$M^n_K(V_1, \dots, V_n; U) = \{ \varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to U \ \text{n-multilineal}/K \}$$

es un K-espacio vectorial.

Vamos a construir un nuevo K-esp. vect.

$$V_1 \underset{K}{\otimes} V_2 \underset{K}{\otimes} \dots \underset{K}{\otimes} V_n = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$$ producto tensorial $/K$ de $V_1, \dots, V_n$

Hagamos $n=2$: (caso general similar) $\quad V_1 \underset{K}{\otimes} V_2 = K^{(V_1 \times V_2)} / S$

$K^{(V_1 \times V_2)}$ = espacio vectorial con base $V_1 \times V_2$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} a_i (u_i, v_i), \ a_i \in K, \ I \text{ finito}, \ u_i \in V_1, \ v_i \in V_2 \right\}$$

S = subespacio generado por

$(u+u', v) - (u, v) - (u', v)$

$(u, v+v') - (u, v) - (u, v')$

$(au, v) - (u, av)$ con $a \in K$

Obs La aplicación

$$V_1 \times V_2 \xrightarrow{\pi} V_1 \otimes_K V_2$$

$$(u,v) \longmapsto \text{clase de } (u,v)$$

es bilineal (= 2-multilineal) sobre K.

Prop 1
Propiedad universal de π

$z \in V_1 \otimes V_2$

$z = \sum_i a_i\, u_i \otimes v_i$

$a_i \in R$, $u_i \in V_1$, $v_i \in V_2$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & V_1 \otimes_K V_2 \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \tilde{\varphi} \text{ lineal}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$/ \quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$

Caso general

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \tilde{\varphi} \text{ lineal}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

π, φ n-multilineales.

$\mathrm{Mult}_K^n(V_1, \ldots, V_n, U) \cong \mathrm{Hom}_K\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, U\right)$

Prop 2 (functorialidad)

$f_1 : V_1 \to V_1$ índice
$f_2 : V_2 \to V_2$

$f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$

$u_1 \otimes u_2 \longmapsto f(u_1) \otimes f(u_2)$

f_1, f_2 iso $\Rightarrow$ $f_1 \otimes f_2$ iso

Prop 5 ~~Bases~~

$u_1, \ldots, u_m$ base de V_1

$v_1, \ldots, v_n$ base de V_2

$\Rightarrow$ $u_i \otimes v_j$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ base de $V_1 \otimes_K V_2$

(V_1, V_2 libres $\Rightarrow V_1 \otimes V_2$ libre)

En part. $\dim_K (V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$

Más generalmente:

$B_i = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$ base de V_i $\quad (i = 1, \ldots, n)$

$\Rightarrow$ ~~Bases~~ $\quad v_J = \bigotimes_{i=1}^{n} v_{J(i)}^i$ $\qquad J = (J(1), \ldots, J(n)) \in \displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{n} [1, n_i]$

$B = \{v_J\}_J$ base de $\bigotimes_{i=1}^{n} V_i$

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \prod_{i=1}^{n} \dim(V_i)$$

Escritura en base
Efecto de cambio de base.

PRACTICA
Calcular matriz de $f_1 \otimes f_2$
(producto de Kronecker)

Prop 3 asociatividad

$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$, $V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$, $V_1\otimes V_2\otimes V_3$

son naturalmente isomorfos.

conmutatividad

$V_1\otimes V_2$, $V_2\otimes V_1$ son naturalmente isomorfos

~~Pitt~~
Mejor dicho:

$\exists!$ φ lineal

$$\varphi : (V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \longrightarrow V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$$

$$\varphi((v_1\otimes v_2)\otimes v_3) = v_1\otimes(v_2\otimes v_3) \qquad \forall v_i\in V_i$$

Prop 4 $\quad (V\oplus V')\underset{K}{\otimes} U \cong (V\underset{K}{\otimes} U)\oplus(V'\underset{K}{\otimes} U)$

$$(v,v')\otimes u \longleftrightarrow (v\otimes u, v'\otimes u)$$

(en tensores elementales)

Cor $\quad \left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\right)\otimes U \cong \bigoplus_{i=1}^{n}(V_i\otimes U)$

$$(v_1,\dots,v_n)\otimes u \longleftrightarrow (v_1\otimes u,\dots,v_n\otimes u)$$

$\Downarrow$

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\right)\underset{K}{\otimes}\left(\bigoplus_{j=1}^{s} U_j\right) \cong \bigoplus_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le s}} V_i\underset{K}{\otimes} U_j$$

Base de $V_1\otimes\cdots\otimes V_n$.
~~eeeeee~~
cambio de base.
("tensores clásicos")

También con producto tensorial con más factores:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} V_i^1\right)\otimes\left(\bigoplus_{i=1}^{n_2} V_i^2\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigoplus_{i=1}^{n_m} V_i^m\right)$$

$$\cong \bigoplus_{i} V^1_{i(1)}\otimes V^2_{i(2)}\otimes\cdots\otimes V^m_{i(m)}$$

~~eeeeee~~ $\quad i\in \displaystyle\bigtimes_{j=1}^{m}[1,n_j]$

Sea V un espacio vectorial

Denotamos $T^n(V) = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ veces}}$

~~Llamamos~~

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$$

Def ~~Un álgebra graduada~~

Sea K un cuerpo (o anillo)

~~Una K-álgebra~~

y sea A una K-álgebra (A es anillo y es K-esp. vect.)

Una graduación en A es una descomposición

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{tal que}$$

1) cada A_n es K-subespacio lineal
2) $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$ $\quad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Una K-álgebra graduada es una K-álgebra provista de una graduación.

Prop $T(V)$ es una K-álgebra graduada.

Dem Definimos aplicaciones (multiplicación de tensores)

$$T^n(V) \times T^m(V) \longrightarrow T^{n+m}(V)$$

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \longmapsto u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$$

en tensores elementales, extendida bilinealmente.

Verifica axiomas de anillo en $T(V)$

$\Rightarrow$ es anillo graduado

$T(V) =$ "álgebra tensorial de V" asociativa, no conmutativa

Propiedad universal de $T(V)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & T(V) \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \tilde{\alpha} \text{ de } K\text{-álgebras}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

$A = K$-álgebra (asociativa pero no nec. conm.)

Tensores mixtos: sea V un K-espacio vectorial

Sea $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

$$T^{n,m}(V) = V^{\otimes n} \otimes (V^*)^{\otimes m}$$

= tensores mixtos de tipo (n, m)

$$T(V, V^*) = \bigoplus_{n,m} T^{n,m}(V)$$

Es un álgebra $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduada.

Tensores simétricos

Denotamos (para V, U ~~…~~ K-mod)

$$\mathrm{Mult}^n_K(V; U) = \mathrm{Mult}^n_K(\underbrace{V, \ldots, V}_{n \text{ veces}}, U)$$

$$= \mathrm{Mult}^n_K(V^n, U)$$

$$= \{\varphi : V^n \to U,\ K\text{-multilineal}\}$$

S_n = grupo simétrico

actúa en $\mathrm{Mult}^n(V; U)$ vía permutación de los factores de V^n, o sea,

$$\varphi\circ(\sigma.\tau) = (\varphi\circ\sigma)\circ\tau$$

$$(\varphi\circ\sigma)\,\cancel{(\ldots)}(v_1, \ldots, v_n) = \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

Def $\mathrm{Sim}^n_K(V;U) = \{ \varphi \in \mathrm{Mult}^n_K(V;U) \;/\; \varphi\circ\sigma = \varphi \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \}$

(funciones multilineales $\mathfrak{S}_n$-invariantes)
" " <u>simétricas</u>

Nota:
$\mathfrak{S}_n$ actúa en $T^n(V)$:

si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"'] & V^n \arrow[d, "\mu"] \\ T^n(V) \arrow[r, "\bar\sigma"'] & T^n(V) \end{tikzcd}$$

(permutación de factores)

μ multilineal canónica.

$$\bar\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

Def: $S^n(V) = T^n(V) / \Sigma$

donde Σ es el subespacio generado por todos los ~~$\bar\sigma(t)-t$~~ $t\circ\sigma - t$, $t \in T^n(V)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

Sea $\pi : T^n(V) \longrightarrow S^n(V)$ proyección cociente

Denotamos $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$

Observar que $v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(n)} = v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$
$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ (por def. de Σ)

Propiedad universal de $S^n(V)$

$$V^n \longrightarrow S^n(V)$$
$$(v_1,\dots,v_n) \longmapsto v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$$

es multilineal simétrica <u>universal</u>

$\Rightarrow \mathrm{Sim}^n_K(V;U) \cong \mathrm{Hom}_K(S^n(V), U)$, $\forall U$

$\Rightarrow$ Functorialidad

$S(V) = T(V)/J$
J = ideal bilátero generado por $\{t - \sigma \cdot t\}$

Prop $S(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n(V)$

$(\, S^0(V) = K, \quad S^1(V) = V, \quad \ldots \,)$

es una K-álgebra graduada conmutativa.

Tiene la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & S(V) \arrow[dl, dashed, "\tilde\beta"] \\ A & \end{tikzcd}$$

α, β K-lineales
(α = inclusión canónica)

A K-alg. conm.

$\tilde\beta$ morfismo de K-alg.

Obs tensores simétricos mixtos:

$$S^{n,m}(V) \underset{def}{=} S^n(V) \otimes S^m(V^*)$$

$$S(V, V^*) = \bigoplus_{n,m} S^{n,m}(V)$$ álgebra bi-graduada

---

Prop $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de V

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^r$ escribimos

$v^\alpha = v_1^{\alpha(1)} \cdot v_2^{\alpha(2)} \cdots v_r^{\alpha(r)}$ [illegible]

Si $|\alpha| = n$ entonces $v^\alpha \in S^n(V)$

Se afirma $\{v^\alpha, |\alpha| = n\}$ es base de $S^n(V)$

Ej $n=2$

Dem Es claro que generan.

L.i.: ejercicio

Prop $\dim S^n(V) = \binom{n+r-1}{r-1}$
$r = \dim V$

Prop $\mathrm{Sim}^n(V;U) \cong \mathrm{Hom}(S^n(V), U)$

(propiedad universal)

Cor $(U=K)$

$$\mathrm{Sim}^n(V;K) \cong S^n(V)^*$$

Tensores antisimétricos (= alternados)

Def $\mathrm{Alt}^n_K(V;U) = \{ \varphi \in \mathrm{Mult}^n_K(V;U) \ / \ \varphi\circ\sigma = sg(\sigma)\varphi \quad \forall \sigma \in S_n \}$

Def $\hat{\Lambda}^n V = T^n V / \Sigma'$

Σ' = subespacio generado por todos los ~~~~ $\tau\circ\sigma - sg(\sigma)\tau$

para $\tau \in T^n V$, $\sigma \in S_n$

$\pi : T^n V \longrightarrow \hat{\Lambda}^n V$ proyección canónica

Denotamos $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$

Observar que $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = sg(\sigma)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$

$\forall \sigma \in S_n$ (por def. de Σ')

Propiedad universal de $\hat{\Lambda}^n V$:

$V^n \longrightarrow \hat{\Lambda}^n V$ es multilineal antisimétrica universal

$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$

$\Rightarrow \mathrm{Alt}^n_K(V;U) \cong \mathrm{Hom}_K(\hat{\Lambda}^n V, U) \quad \forall U$

(caso $U=K$)

$\Rightarrow$ Funtorialidad

~~~~ $\hat{\Lambda}^n V$ ~~~~ (~~~~ $\hat{\Lambda}^n f$
~~~~

Prop $\Lambda(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n V$

$(\Lambda^0 V = K,\ \Lambda^1 V = V,\ \dots)$

es una K-álgebra graduada anti-conmutativa

$(\omega_n \cdot \omega_m = (-1)^{nm}\, \omega_m \cdot \omega_n)$

$\omega_n \in \Lambda^n V$

con propiedad universal.

Obs Tensores mixtos

$\Lambda^{n,m}(V) = \Lambda^n(V) \otimes \Lambda^m(V^*)$

$\Lambda(V,V^*) = \bigoplus_{n,m} \Lambda^{n,m}(V)$

Otros: $S(V)\otimes\Lambda(V)$ etc. $S(V)\otimes\Lambda(V^*)$ ...

Producto tensorial de álgebras graduadas.

Prop $B=\{v_1,\dots,v_r\}$ base de V

Para cada $\alpha: [1,\dots,n] \to [1,\dots,r]$ creciente

$1 \le \alpha(i) \le r$ $(n \le r)$

$\alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(n)$

$\Lambda^\alpha v = v_{\alpha(1)} \wedge v_{\alpha(2)} \wedge \dots \wedge v_{\alpha(n)} \in \Lambda^n V$

$\{\Lambda^\alpha v\}_\alpha$ forman base de $\Lambda^n V$

$\Rightarrow \dim \Lambda^n V = \binom{r}{n}$

Calcular matriz de cambio de base. (PRÁCTICA)

También: para cada $A \subset \{1,\dots,r\}$ $|A| = n$

$\Lambda^A v = v_{a_1} \wedge \dots \wedge v_{a_n}$ $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$

CAMPOS DE TENSORES

Lo hecho para campos de vectores se puede imitar para otros tipos de tensores.

Sea X una variedad.

1) Campos de co-vectores (o 1-formas diferenciales)

Consideramos para cada $x \in X$ el espacio vectorial

$$TX(x)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TX(x), \mathbb{R}) \cong M_x/M_x^2$$

Denotamos $TX^* = \coprod_{x \in X} TX(x)^*$, con proyección $\xrightarrow{\pi} X$

Def un campo de co-vectores en X es una ~~[illegible]~~ sección $\omega : X \to TX^*$ de π.

(o sea, para cada $x \in X$, $\omega(x) \in TX(x)^*$)

Expresión en coordenadas locales:

si $U \subset X$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable

df es un campo de co-vectores en X:

$$df(x)(v) = v(f_x) \qquad \begin{array}{l} x \in U \\ f_x = \text{germen de } f \text{ en } x \\ v \in TX(x) \end{array}$$

Si (U, φ) es carta, tenemos los campos de co-vectores

$$d\varphi_1, \dots, d\varphi_n$$

Para cada $x \in U$, $d\varphi_1(x), \dots, d\varphi_n(x)$ es base de $TX(x)^*$ dual a la base $\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\right|_x, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_n}\right|_x$ de $TX(x)$

Por lo tanto, si ω es campo de co-vectores en X $\omega|_U$ se escribe de manera única

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n a_i \, d\varphi_i \qquad \begin{array}{l} a_i : U \to \mathbb{R} \\ \text{funciones} \end{array}$$

Cambio de base:

sea $(\mathcal{V}, \psi)$ otra carta ~~.....~~

Entonces $\omega|_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \, d\psi_i \qquad b_i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$

En $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ vale

$$\sum_i a_i \, d\varphi_i = \sum_j b_j \, d\psi_j$$

$d\psi_j = \sum_i \alpha_{ij} \, d\varphi_i \qquad \alpha_{ij} = ? \qquad$ Evalúo en $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$

$d\psi_j \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right) = \alpha_{ij} \quad \to \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i}$

$$\boxed{d\psi_j = \sum_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i} \, d\varphi_i}$$

$$\to \quad \sum_i a_i \, d\varphi_i = \sum_j b_j \left(\sum_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i} \, d\varphi_i \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i} \, b_j \right) d\varphi_i$$

$$\to \quad \boxed{a_i = \sum_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i} \, b_j}$$ condiciones de compatibilidad

$$[\omega]_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot [\omega]_\psi$$

Recíprocamente, ω está definida ~~.....~~ por

1) Un cubrimiento $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi^\alpha)$ por cartas

2) ~~.....~~ Expresiones locales $\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \, d\varphi_i^\alpha$

que satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$a_i^\alpha = \sum_j \frac{\partial \varphi_j^\beta}{\partial \varphi_i^\alpha} \cdot a_j^\beta \qquad \forall \alpha, \beta \quad \forall i, j$$

Def Decimos que un campo de co-vectores ω es diferenciable si los $a_i^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ son diferenciables, $\forall i$, $\forall \alpha$.

Prop Independencia del sistema de coordenadas.

Dem ejercicio.

Def Denotamos $\Gamma(TX^*)$ a el conjunto de campos de co-vectores diferenciables en X.

Del mismo modo, $\Gamma(TU^*)$ para cada $U \subset X$ abierto.

Prop Cada $\Gamma(TU^*)$ es un módulo sobre el anillo DU de funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$ $\quad ((f.\omega)(x) = f(x)\,\omega(x))$

Ejercicio: Definir atlas en $(TX)^*$ $\Rightarrow$ ω diferenciable $\Leftrightarrow$ ω función diferenciable $X \to (TX)^*$ $\Leftrightarrow$ $\forall U \subset X$, $\forall v \in \Gamma T(U)$, $\omega(v) : U \to \mathbb{R}$ diferenciable

Dem: ejercicio.

ir a pág. 55

---

2) Definimos del mismo modo

$(TX)^{\otimes n}$, ~~S^n~~ $S^n(TX)$, $\hat{\Lambda}^n(X)$, etc. $S^n(TX^*)$, $\hat{\Lambda}^n(TX^*)$,

$\Gamma(TX^{\otimes n})$, $\Gamma(S^n X)$, $\Gamma(\hat{\Lambda}^n X)$, $\Gamma(\text{etc.})$

- $TX^{\otimes n} = \coprod_{x \in X} TX(x)^{\otimes n}$
- def. de campo de tensores
- expresión en coordenadas
- def. de campo diferenciable.

Mapa en detalle ~~$\otimes$~~, $S^2(TX^*)$, $\hat{\Lambda}^2(TX^*)$

$$S^2(TX^*) = \coprod_{x\in X} S^2(TX(x)^*) = \coprod_{x\in X} \mathrm{Sim}^2(TX(x),\mathbb{R})$$

Recordar: $S^2(V^*) = \mathrm{Sim}^2(V,\mathbb{R})$
= formas bilineales simétricas $V\times V \to \mathbb{R}$

Si $\gamma : X \to S^2(TX^*)$ es un campo

para cada $x\in X$, $\gamma(x) : TX(x) \times TX(x) \to \mathbb{R}$

es una forma bilineal simétrica.

Def Sea X una variedad. Una métrica de Riemann en X es una γ tal que $\gamma(x)$ es producto interno en ~~FG~~ $TX(x)$, $\forall x\in X$.
(bien definido positivo)

En coordenadas locales γ se escribe

$$\gamma = \sum_{i,j} a_{ij}\, d\varphi_i \cdot d\varphi_j$$

$d\varphi_i \cdot d\varphi_j = d\varphi_j \cdot d\varphi_i$

Ejercicio: escribir condiciones de compatibilidad.

Ej X = abierto de $\mathbb{R}^n$, p.ej. disco de Poincaré, semiplano $dx\,dy/y^2$

$$\hat{\Lambda}^2(TX^*) = \coprod_{x\in X} \hat{\Lambda}^2(TX(x)^*)$$

Un campo se llama "2-forma diferencial"

Expresión en coordenadas locales

$$\omega = \sum_{1\le i< j\le n} a_{ij}\, d\varphi_i \wedge d\varphi_j$$

a_{ij} funciones

$d\varphi_i \wedge d\varphi_j = -\, d\varphi_j \wedge d\varphi_i$

$\overset{3}{\Lambda}(TX^*)$ 3-formas

$$\omega = \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_{ijk} \; d\varphi_i \wedge d\varphi_j \wedge d\varphi_k$$

$\overset{k}{\Lambda}(TX^*)$ k-formas

$$\omega = \sum_{\alpha} a_\alpha \overset{\alpha}{\Lambda} d\varphi$$

$\alpha : [1, \dots, k] \longrightarrow [1, \dots, n]$ creciente

$\alpha = (\cancel{\ } 1 \le \alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(k) \le n)$

$$\overset{\alpha}{\Lambda} d\varphi = d\varphi_{\alpha(1)} \wedge d\varphi_{\alpha(2)} \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha(k)}$$

Ejercicio Escribir condiciones de compatibilidad campos de para $\overset{k}{\Lambda}(TX^*)$ (y otros tipos de tensores)

~~Pa~~ Operación de pull-back de ~~...~~ campos de tensores contravariantes

Sea $f : X \longrightarrow Y$ diferenciable

Tenemos df

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi"'] & TY \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$(df)^* =$ traspuesta

$$\begin{tikzcd} (TX)^* \arrow[d, "\pi"'] & (TY)^* \arrow[l, "(df)^*"'] \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "f^*\omega"] & Y \arrow[u, bend right, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

$$f^*\omega \underset{def}{=} (df)^* \circ \omega \circ f \quad (?)$$

Dinámica. $\nexists$ f_*, f^* para campos de vectores

Dif. de campos de vectores f-relacionados

Hoy:
1) f_*, f^* para campos de vectores
2)$^+$ Ejemplos de formas dif (simétricas y antisimétricas)
3) generaciones con formas
Ejemplos de derivada exterior
Enunciar $\exists!$ d
Dem. próx. clase.

Sea $f : X \to Y$ diferenciable.

Sea $\omega \in \Gamma(TY)^*$ una 1-forma diferenciable en Y.

Quiero definir $f^*\omega \in \Gamma(TX)^*$

Para $x \in X$, $\quad df(x) : TX(x) \to TY(f(x))$

$$df(x)^* : TY(f(x))^* \to TX(x)^*$$

$$(f^*\omega)(x) = df(x)^*(\omega(f(x))) \in TX(x)^*$$

o sea:

$$\begin{tikzcd} TX(x) \arrow[r, "df(x)"] \arrow[dr, "(f^*\omega)(x)"'] & TY(f(x)) \arrow[d, "\omega(f(x))"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

En coordenadas locales, si $\omega = \sum_{i=1}^{n} \overset{a_i(y)}{a_i} \cdot dy_i$

$y_1, \dots, y_n$ coordenadas en Y

Sup. f dada por $y_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$ $\qquad m = \dim X$

$$\Rightarrow \quad f^*\omega = \sum_i a_i(f(x))\, df_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(f(x)) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot a_i(f(x)) \right) dx_j$$

Ej $\quad X = S^1 \xhookrightarrow{f} Y = U \subset \mathbb{R}^2 \qquad U$ abierto $\supset S^1$

$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy \qquad a, b : U \to \mathbb{R}^2 \quad C^\infty$

$f^*\omega =$ ~~[illegible]~~ de ~~[illegible]~~ $\omega|_{S^1}$

$x^2 + y^2 = 1 \qquad 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \quad$ (en S^1)

$f^*\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ (con la relación $x\,dx + y\,dy = 0$)

$= a(x,\sqrt{1-x^2})\,dx + b(x,\sqrt{1-x^2})\left(-\frac{x}{y}\right)dx$

en $y>0$
vale $y=\sqrt{1-x^2}$

$dy = -\frac{x}{y}\,dx$

$= \left[a(x,\sqrt{1-x^2}) - \frac{x}{y}\, b(x,\sqrt{1-x^2})\right] dx$

usar 4 cartas para cubrir S^1.

($f^*\omega$ 4 expresiones locales)

Ej $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ definida en $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\omega|_{S^1}$ = "forma diferencial ~~angular~~ angular"

Si $\alpha: \mathbb{R} \to S^1$ $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$\alpha^*(\omega|_{S^1}) = (\cos t)\, d(\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t\, d(\cos t)$

$= dt$

Pull-back de formas simétricas y de formas alternadas

$f: X \to Y$

$\omega \in \Gamma(\overset{r}{\Lambda}(TY)^*) \longrightarrow f^*\omega \in \Gamma(\overset{r}{\Lambda}(TX)^*)$

$\eta \in \Gamma(S^r(TY)^*) \longrightarrow f^*\eta \in \Gamma(S^r(TX)^*)$

$df(x): TX(x) \to TY(f(x))$

$df(x)^*: TY(f(x))^* \to TX(x)^*$

$\overset{r}{\Lambda} df(x)^*: \overset{r}{\Lambda} TY(f(x))^* \longrightarrow \overset{r}{\Lambda} TX(x)^*$

$S^r df(x)^*: S^r TY(f(x))^* \longrightarrow S^r TX(x)^*$

Formas diferenciales

V $\mathbb{K}$-espacio vectorial

$v_1, \dots, v_n$ base ordenada de V.

Base de $\overset{r}{\wedge} V$ $(0 \leq r \leq n)$

Para cada $\alpha : \{1, \dots, r\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

función estrictamente creciente

denotamos $v_\alpha = v_{\alpha(1)} \wedge v_{\alpha(2)} \wedge \dots \wedge v_{\alpha(r)} \in \overset{r}{\wedge} V$

$(1 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(r) < n)$

Entonces $\{ v_\alpha, \ \alpha \in G_{r,n} \}$ es base de $\overset{r}{\wedge} V$

$\to$ todo elemento de $\overset{r}{\wedge} V$ se escribe

$$\sum_{\alpha \in G_{r,n}} a_\alpha \cdot v_\alpha$$

Ojo $|G_{r,n}| = \dim \overset{r}{\wedge} V = \binom{n}{r} = \left(\begin{array}{c} \text{subconjuntos} \\ \text{de } r \text{ elementos} \\ \text{en } \{1, \dots, n\} \end{array} \right)$

Denotamos $\wedge V = \bigoplus_{r=0}^{n} \overset{r}{\wedge} V$ = algebra exterior de V

$\dim \wedge V = 2^n$.

X variedad $\mathcal{C}^\infty$, $\dim X = n$.

Notación: $\mathcal{E}^r(X) = \{ r\text{-formas en } X \}$

$$\left(= \Gamma\left(\overset{r}{\wedge}(TX^*)\right) \right)$$

Si $\omega \in \mathcal{E}^r(X)$ y (U, φ) es carta de X

$$\omega|_U = \sum_{\alpha \in G_{r,n}} a_\alpha \, d\varphi_\alpha$$

$a_\alpha : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$, $d\varphi_\alpha = d\varphi_{\alpha(1)} \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha(r)}$

Operaciones con formas diferenciales

a) operaciones de álgebra multilineal
b) operaciones de cálculo diferencial
a.1) Producto exterior
a.2) Pull-back
a.3) Producto interior
b) derivada exterior

a) ~~[illegible]~~

a.1 **Producto exterior**

$\omega \in \mathcal{E}^r(X)$, $\eta \in \mathcal{E}^s(X)$ $\Rightarrow$

$\omega \wedge \eta \in \mathcal{E}^{r+s}(X)$ está definido por

$$(\omega\wedge\eta)(x) = \omega(x)\wedge\eta(x) \in \bigwedge^{r+s} TX(x)^*$$

Con este producto,

$$\mathcal{E}(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{E}^r(X)$$ es un álgebra (asociativa, anti-conmutativa)

ya que $\forall$ espacio vectorial V de dim n

$$\Lambda V = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r V$$ es un álgebra con esas propiedades.

$\mathcal{E}(X)$ – $\mathcal{D}(X)$-álgebra graduada anti-conmutativa.

b) Pull-back $\mathcal{E}$.

a.2 Si U, V son K-esp. vect. y $\varphi: U \to V$ es lineal entonces φ induce $\bigwedge^r \varphi : \bigwedge^r U \to \bigwedge^r V$

$u_1\wedge\dots\wedge u_r \mapsto \varphi(u_1)\wedge\dots\wedge\varphi(u_r)$
(en tensores elementales)

Sea $f: X \to Y$ C^∞

Para $x \in X$, sea $y = f(x)$

$$df(x) : TX(x) \to TY(y)$$

$$df(x)^* : TY(y)^* \to TX(x)^*$$

Para cada r,

$$\bigwedge^r (df(x)^*) : \bigwedge^r (TY(y)^*) \to \bigwedge^r (TX(x)^*)$$

c) Producto interior: contraer con campos de vectores

a.3 primer caso: $\omega(v) = \langle \omega, v\rangle$ — ω 1-forma, v campo de vectores

Producto interior

$$\# \quad \Omega^r(X) \times \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \Omega^{r-1}(X)$$

$$(\omega, v) \longmapsto \langle \omega, v \rangle$$

Recordar de álgebra multilineal:

V K-esp. vect.

$$\Lambda^r(V^*) \times V \xrightarrow{\gamma} \Lambda^{r-1}(V^*)$$

$$\gamma(\omega, v) = \langle \omega, v \rangle \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \varphi_i(v)\, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\varphi}_i \wedge \cdots \wedge \varphi_r$$

$$\omega = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r \,, \quad \varphi_i \in V^*$$

También podemos verlo en términos de formas multilineales alternadas:

$$Alt^r(V, K) \times V \xrightarrow{c} Alt^{r-1}(V, K)$$

$$(\varphi, v) \longmapsto \langle \varphi, v \rangle$$

donde $\langle \varphi, v \rangle (v_1, \dots, v_{r-1}) = \varphi(v_1, \dots, v_{r-1}, v)$

$($ $\varphi(v_1, \dots, v_r)$

$v = v_r$

Las dos coinciden:

$$\alpha_r : \Lambda^r(V^*) \longrightarrow Alt^r(V, K) \quad \text{iso canónico:}$$

$$\alpha_r(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(v_1, \dots, v_r) = \det\big(\varphi_i(v_j)\big)_{i,j}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^r(V^*) \times V & \xrightarrow{\gamma} & \Lambda^{r-1}(V^*) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_r \times 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{r-1}} \\ \mathrm{Alt}^r(V,K) \times V & \xrightarrow[c]{} & \mathrm{Alt}^{r-1}(V,K) \end{array}$$

conmuta:

calculo en $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r, v)$:

$\alpha_{r-1}\, \gamma(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r, v) = \alpha_{r-1}\left(\sum (-1)^{r-i} \varphi_i(v)\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\varphi}_i \wedge \cdots \wedge \varphi_r\right)$

evaluado en $(v_1, \ldots, v_{r-1})$:

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \varphi_i(v)\ \alpha_{r-1}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\varphi}_i \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(v_1, \ldots, v_{r-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \varphi_i(v)\ \det\left(\varphi_k(v_j)\right)_{\substack{k \neq i,\ 1 \leq k \leq r \\ 1 \leq j \leq r-1}} \qquad (*)$$

$c(\alpha_r \times 1)(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r, v) = c(\alpha_r(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r), v)$

evaluado en $(v_1, \ldots, v_{r-1})$:

$c(\alpha_r(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r), v)(v_1, \ldots, v_{r-1}) =$

$\alpha_r(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r) \qquad v = v_r$

$$= \det\left(\varphi_k(v_j)\right)_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$$

$(*)$ es el desarrollo de este det por la última columna $\Rightarrow$ vale la igualdad.

Sea $\omega \in \mathcal{E}^r(Y)$.

Definimos $f^*\omega \in \mathcal{E}^r(X)$: para cada $x \in X$

$$(f^*\omega)(x) \underset{def}{=} \overset{r}{\wedge}(df(x)^*)\,(\omega(f(x)) \in \overset{r}{\wedge}(TX(x)^*)$$

Cálculo en coordenadas

(y verificación de que ω $C^\infty \Rightarrow \varphi^*\omega$ C^∞)

sea (V, ψ) una carta en Y con

$$\omega|_V = \sum_\alpha a_\alpha \cdot d\psi_\alpha$$

Entonces $\varphi^*\omega|_U$, $U = f^{-1}(V)$ viene dado por

$$f^*\omega|_U = \sum_\alpha \varphi^*(a_\alpha)\; d(\varphi^*\psi)_\alpha$$

donde para una $g : V \to \mathbb{R}$ defino

$f^*g : U \to \mathbb{R}$ como $f^*g = f \circ g$

$(U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R})$

Ej $r = 1$ $\qquad \omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \, dy_i$

~~En coordenadas~~

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow f^*\omega = \sum_i a_i(f(x))\, df_i =$$

$$= \sum_i a_i(f(x)) \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

$$= \sum_j \Big(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot a_i(f(x)) \Big)\, dx_j$$

Ej $X = S^1$, ...

d) Diferencial exterior

Sea $\omega \in \mathcal{E}^r(X)$.

Vamos a definir una $d\omega \in \mathcal{E}^{r+1}(X)$

$\rightsquigarrow$ pag. 74

Def X paralelizable si $\exists\, v_1, \ldots, v_n \in \Gamma(TX)$ / $\{v_1(x), \ldots, v_n(x)\}$ base de $TX(x)$, $\forall x \in X$.

Def X orientable si $\exists\, \omega \in \mathcal{E}^n(X)$ $(n = \dim X)$ / $\omega(x) \neq 0$, $\forall x \in X$.

72

En coordenadas locales,

$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \qquad i = 1, \dots, n$

Reemplaza cada dy_i por $df_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$

(puede ser tanto $n \le m$ como $n \ge m$)

Ej $f : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad S =$ superficie.

$\eta = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2$ 2-forma simétrica en $\mathbb{R}^3$ (producto interno canónico en $T(\mathbb{R}^3)(x) = \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^3$) que define la métrica usual de $\mathbb{R}^3$

$f^*\eta$ es una 2-forma simétrica en S que define la "métrica inducida"

Al escribir $f^*\eta$ en una carta de S se obtienen los clásicos ~~...~~ "coeficientes de la primera forma E, F, G".

[caso de una curva paramétrica]

Ej Sea $\omega = a\,dx + b\,dy$ una 1-forma en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$)

Pienso $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) y estudio comportamiento de ω en ~~el~~ el infinito.

Coordenadas ~~...~~ homogéneas $x_0, x_1, x_2 \qquad x = \frac{x_1}{x_0}, \; y = \frac{x_2}{x_0}$

$\mathbb{R}^2 = U_0 = (x_0 \neq 0) \subset \mathbb{P}^2$

En $U_1 = (x_1 \neq 0)$ tengo coordenadas $u = \frac{x_0}{x_1}, \; \frac{x_2}{x_1} = v$

$x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{u} = u^{-1} \qquad y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{x_2/x_1}{x_0/x_1} = v u^{-1}$

$dx = -u^{-2}\,du \qquad dy = u^{-1} dv - u^{-2} v\, du$

$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = \cancel{a(\dots)} - a\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\frac{du}{u^2} + b\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\left(\frac{dv}{u} - \frac{v\,du}{u^2}\right)$

$= -\left(a\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + v\, b\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right)\frac{du}{u^2} + b\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\frac{dv}{u}$

Similar en U_2

Considero una 2-forma en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$)

$\omega = \alpha(x,y)\, dx \wedge dy$

$\mathbb{R}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}^2$ nuevamente.

En U_1: $dx \wedge dy = -\frac{du}{u^2} \wedge \left(\frac{dv}{u} - \frac{v\,du}{u^2} \right)$

$= -\frac{1}{u^3}\, du \wedge dv$

ω tiene un polo de orden 3 en $u=0$ (= recta del infinito)

similar en U_2 (con misma conclusión)

Ej $f \in \mathbb{R}[x,y]$ ($\mathbb{C}[x,y]$) no-singular

$X = (f=0) \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$)

$f=0$ en $X \Rightarrow f_x\, dx + f_y\, dy = 0$ en $\underline{X}$

Sea $\omega = g \frac{dx}{f_x}$ ~~global~~ $g \in \mathbb{R}[x,y]$ ($\mathbb{C}[x,y]$)

1-forma en $U = X \cap (f_x \neq 0)$

Afirmo: ω se extiende a todo X

Dem: $\frac{dx}{f_x} = -\frac{dy}{f_y}$ en $X \cap (f_x \neq 0) \cap (f_y \neq 0)$

considero $\omega' = -g \cdot \frac{dy}{f_y}$ en $V = X \cap (f_y \neq 0)$

Tenemos $X = U \cup V$, $\omega|_{U \cap V} = \omega'|_{U \cap V}$

$\Rightarrow \{(U,\omega), (V,\omega')\}$ define una 1-forma en X.

Llamemosla Ω

Ahora quiero estudiar el comportamiento de Ω en la clausura proyectiva $\overline{X} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)

2-forma $\omega = A\, dx_2 \wedge dx_3 + B\, dx_3 \wedge dx_1 + C\, dx_1 \wedge dx_2$

$$d\omega = dA \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dB \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dC \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial B}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial C}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{\partial C}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

d corresponde a gradiente, rotor, divergencia

bajo la identificación

0-formas = funciones

1-formas $A\,dx + B\,dy + C\,dz \longleftrightarrow$ campo de vectores (A, B, C)

2-formas $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy \longleftrightarrow$ campo de vectores (A, B, C)

~~Prop. Sea X una variedad de dimensión n.~~

~~Para cada $0 \le k \le n$ existe un único operador~~

$$\cancel{d : \Gamma \Lambda^k (TX)^* \longrightarrow \Gamma \Lambda^{k+1} (TX)^*}$$

~~tal que~~

~~1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$~~

~~2)~~

Notación $\mathcal{E}^r(X) = \Gamma \overset{r}{\wedge}(TX)^* =$ r-formas en X

~~Prop~~ Teo Sea X una variedad de dim $=n$.

Para cada r existe una aplicación

$$d = d_r : \mathcal{E}^r(X) \to \mathcal{E}^{r+1}(X)$$

tal que:

a) d es $\mathbb{R}$-lineal

b) $d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{|\lambda|} \lambda \wedge d\mu$

(denotamos $|\lambda| = r$ si $\lambda \in \mathcal{E}^r(X)$)

c) $\forall \omega \in \mathcal{E}^r$, $d(d\omega) = 0$ $\quad (d^2 = 0)$

d) para $f \in \mathcal{E}^0(X) = C^\infty(X, \mathbb{R})$

~~dfes~~ $d_0 f = df \in \mathcal{E}^1(X)$

Además, la manera de aplicaciones (d_r)

es única satisfaciendo a), b), c), d).

Dem Sea $\omega \in \mathcal{E}^r(X)$, sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de X.

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_\alpha a_\alpha \, d\varphi_\alpha$$

Definimos $(d\omega)|_{\mathcal{U}} = \sum_\alpha da_\alpha \wedge d\varphi_\alpha$

Necesitamos ver que $d\omega$ es una $(k+1)$-forma

(o sea, satisface relaciones de compatibilidad)

2 modos: cálculo directo (ejercicio?)

argumento más sofisticado siguiente:

Sea $\omega \in \mathcal{E}^r(X)$, sean $(\mathcal{U}, x)$, $(\mathcal{V}, y)$ cartas

$$\Rightarrow \quad \omega = \sum_\alpha a_\alpha \overset{\alpha}{\wedge} dx \quad \text{en } \mathcal{U}$$

$$\omega = \sum_\beta b_\beta \overset{\beta}{\wedge} dy \quad \text{en } \mathcal{V}$$

$$\sum_\alpha a_\alpha \overset{\alpha}{\wedge} dx = \sum_\beta b_\beta \overset{\beta}{\wedge} dy \quad \text{en } \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$$

Quiero ver (⟵

$$\sum_\alpha da_\alpha \wedge \overset{\alpha}{\wedge} dx = \sum_\beta db_\beta \wedge \overset{\beta}{\wedge} dy \quad \text{en } \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$$

($\Rightarrow$ tengo $d\omega \in \mathcal{E}^{r+1}(X)$)

I) Veamos que se satisface el enunciado del Teo para $X = \mathcal{U}$ y con d definida como recién (d en principio depende de la elección de carta φ)

a) claro

b) $\lambda = f\, d\varphi_\alpha$, $\mu = g\, d\varphi_\beta$ $\qquad \alpha \in G_{r,n}$, $\beta \in G_{s,n}$

escribir ...

c) basta con $\omega = f\, d\varphi_\alpha$

escribir, equivale a igualdad de derivadas parciales mixtas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi_j \partial\varphi_i}$

d) claro

Unicidad: sup. $d' : \mathcal{E}^r(\mathcal{U}) \to \mathcal{E}^{r+1}(\mathcal{U})$ satisface a) - d)

Quiero ver $d' = d$. Basta con ver $d'(\omega) = d(\omega)$, $\omega = f\, d\varphi_\alpha$

$$d'(f\, d\varphi_\alpha) \underset{b)}{=} d'(f) \wedge d\varphi_\alpha + f \wedge d'(d\varphi_\alpha) \underset{d)}{=} df \wedge d\varphi_\alpha + f \wedge d'(d\varphi_\alpha)$$

Basta con $d'(d\varphi_\alpha) = 0$ $\qquad d\varphi_\alpha = d\varphi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{\alpha_r} = d'\varphi_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d'\varphi_{\alpha_r}$

$$d'(d\varphi_\alpha) \underset{b)}{=} \underbrace{d'(d'\varphi_{\alpha_1})}_{=0 \text{ por c)}} \wedge d'\varphi_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge d'\varphi_{\alpha_r} - d'\varphi_{\alpha_1} \wedge \underbrace{d'(d'\varphi_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge d'\varphi_{\alpha_r})}_{=0 \text{ por inducción}}$$

~~Obs~~ I) Enunciado general

Sea $U \subset X$ un abierto, dominio de dos cartas $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$, $\psi : U \to V' \subset \mathbb{R}^n$

Denotemos d_φ, d_ψ los correspondientes operadores en formas diferenciales. Como ambos satisfacen a) - d), por unicidad $d_\varphi = d_\psi$

Sean (U, φ), (V, ψ) dos cartas
Entonces ~~U~~ $U \cap V \subset X$ es abierto ~~de dos~~ dominio de dos cartas $\varphi|_{U \cap V}$, $\psi|_{U \cap V}$ como arriba

$\Rightarrow$ $d_\varphi = d_\psi$ en $U \cap V$

$\Rightarrow$ buena def. de $d\omega$ para todo $\omega \in \mathcal{E}^r(X)$.

Además, d satisface a) - d) porque lo satisface en cada abierto coordenado. ✓

Recordar: si A es una $\mathbb{R}$-álgebra

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A) = \{\delta : A \to A \,/\, \delta \text{ es } \mathbb{R}\text{-derivación}\}$$

Sea $v \in \mathfrak{X}(X)$. Entonces v induce una $\mathbb{R}$-derivación de $A = \mathcal{D}(X)$:

$$D(v) : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$$

$$D(v)(f)(x) = v_x(f_x)$$

$f_x \in \mathcal{D}_x$ germen de f en x.

$v_x : \mathcal{D}_x \to \mathbb{R}$ vector tangente en x.

Prop La aplicación

$$D : \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}(X))$$

~~a) Es morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras~~

a) Es $\mathbb{R}$-lineal

c) Es iso de $\mathbb{R}$-esp. vect.

b) $D[u,v] = D(u) \circ D(v) - D(v) \circ D(u)$

a) fácil

c) No trivial, lo vimos en la Práctica.
(usa particiones de la unidad)

b) ejercicio.

(D es iso de álgebras de Lie)

Obs Caracterización de $[u,v]$: es el único elemento de $\mathfrak{X}(X)$ que satisface b)

Derivada de Lie

X variedad, G grupo actuando en X

$\Rightarrow$ G actúa en el conjunto $\mathcal{V}(X)$

" $\Omega^r(X)$ $\forall r$

y a todos los campos de tensores $S^r(X)$, $T^r(X)$, etc.

En efecto: si $g \in G$ denotamos $\rho(g): X \to X$ difeo acción

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "d\rho(g)"] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\rho(g)"'] \arrow[u, bend left, "\substack{g\cdot v \\ (def)}"] & X \arrow[u, bend right, "v"'] \end{tikzcd}$$

$$g\cdot v = d\rho(g)^{-1} \circ v \circ \rho(g)$$

además, $d\rho(g)^{-1} = d\rho(g^{-1})$

(acción en $\mathcal{V}(X)$)

acción en $\Omega^r(X)$: $\quad g\cdot\omega = \rho(g)^*(\omega) = $ ~~[illegible]~~

(sale de cuadrado similar) $\quad$ ~~[illegible]~~ $= d\rho(g)^t \circ \omega \circ \rho(g)$

Sea $v \in \mathcal{V}(X)$. Denotemos ~~f~~ $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ el ~~f~~ (sup. completo) grupo uni-paramétrico de difeos inducido por v

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}(X) \quad \leftrightarrow \quad$ acción de $G=(\mathbb{R},+)$ en X

$t \longmapsto f_t \qquad \mathbb{R}\times X \to X$, $(t,x) \mapsto t\cdot x$

Vamos a "derivar tensores respecto a v"

Si τ es un campo de tensores (de cierto tipo) vamos a definir $L_v(\tau)$ = derivada de Lie de τ

(es un ~~[illegible]~~ campo de tensores, del mismo tipo)

Derivada de Lie de un campo de vectores.

Sea $v \in \mathcal{V}(X)$ como antes.

Sea $u \in \mathcal{V}(X)$. Quiero definir $L_v(u) \in \mathcal{V}(X)$

$$L_v(u)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{d\phi_{-t}(u_{\phi_t(x)}) - u(x)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(d\phi_{-t}(u_{\phi_t(x)}) \right),$$

Si denoto $\phi_t(x) = t.x$ (acción de $\mathbb{R}$ en X)

$$\Rightarrow \quad d\phi_{-t}(u_{\phi_t(x)}) = (t.u)_x \quad (\text{acción de } \mathbb{R} \text{ en } \mathcal{V}(X))$$
$$= ((\phi_t)_* u)_x$$

$$\Rightarrow \quad L_v(u)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{(t.u)_x - u_x}{t}$$

$$L_v(u) = \lim_{t \to 0} \frac{t.u - u}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t)_* u - u}{t}$$

Similar para $\omega \in \Omega^k(X)$:

$$L_v(\omega)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t^* \omega)(x) - \omega(x)}{t}$$

Similar para otros tensores

(def. gral. en Bourbaki, functores tensoriales)

Propiedades de la derivada de Lie

$v \in \mathcal{V}(X)$, $F_t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$ acción generada por v

$$\frac{d}{dt} F_t(x) = v_{F_t(x)}$$

① Para $f \in \mathcal{D}(X)$, $L_v(f) = v(f)$ $(= \langle v, df \rangle)$

Dem. Sea $x \in X$.

$$(L_v f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(F_t(x)) - f(x)}{t} =$$

= derivada en $t=0$ de la composición
$t \longmapsto F_t(x) \longmapsto f(F_t(x))$

= (regla de la cadena)

$$= df(F_0(x)) \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t(x) \right)$$

$$= df(x)(v_x) = v(f)(x)$$

Propiedades de la derivada de Lie

$v \in \mathcal{V}(X)$ $\quad F_t : X \to X \quad (t \in \mathbb{R})$ grupo 1-paramétrico generado por v.

② L_v actuando en $\mathcal{V}(X)$, $\Omega(X)$, etc. es $\mathbb{R}$-lineal

Dem claro ($(F_t)_*$, $(F_t)^*$ son lineales, $\forall t$)

③ L_v es $\mathbb{R}$-derivación de $\mathcal{D}(X)$-módulos, en el sentido:

$$L_v(f \cdot g) = L_v(f) \cdot g + f \cdot L_v(g), \quad f, g \in \mathcal{D}(X)$$

$$L_v(f \cdot \omega) = L_v(f) \cdot \omega + f \cdot L_v(\omega), \quad f \in \mathcal{D}(X),\ \omega \in \Omega(X)$$

$$L_v(f \cdot u) = L_v(f) \cdot u + f \cdot L_v(u), \quad f \in \mathcal{D}(X),\ u \in \mathcal{V}(X)$$

$$L_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_v(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_v(\omega_2), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$$

Dem Tenemos

$$F_t^*(f \cdot g) = F_t^*(f) \cdot F_t^*(g), \ \forall t \quad \left(\sigma^*(f \cdot g) = \sigma^*(f) \cdot \sigma^*(g) \ \forall \text{ difeo } \sigma : X \to X \right)$$

$$F_t^*(f \cdot \omega) = F_t^*(f) \cdot F_t^*(\omega)$$

$$(F_t)_*(f \cdot u) = F_t^*(f) \cdot (F_t)_*(u)$$

$$F_t^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F_t^*(\omega_1) \wedge F_t^*(\omega_2)$$

Aplicar $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ usando la bilinealidad de las expresiones a la derecha

p.ej: la última,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t^*(\omega_1) \wedge F_t^*(\omega_2) = \lim_{t \to 0} \frac{F_t^*(\omega_1) \wedge F_t^*(\omega_2) - \omega_1 \wedge \omega_2}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{F_t^*(\omega_1) \wedge F_t^*(\omega_2) - F_t^*(\omega_1) \wedge \omega_2 + F_t^*\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} F_t^*(\omega_1) \wedge \frac{F_t^*(\omega_2) - \omega_2}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{F_t^*\omega_1 - \omega_1}{t} \wedge \omega_2 = \checkmark$$

Prop Sea $v \in \mathcal{V}(X)$, sea $x \in X$ / $v_x \neq 0$

Entonces $\exists$ carta $c = (\mathcal{U}, \varphi)$, $\mathcal{U} \ni x$

tal que $v = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$ en $\mathcal{U}$.

(forma canónica de un campo de vectores alrededor de un punto no-singular)

Dem: después. (lo vieron en la Práctica)

Sea $A = \{x \in X / v_x \neq 0\}$ (abierto)

Por la cuenta de antes + Prop, la igualdad (6) vale en el abierto A.

Por continuidad, también vale en $\bar{A}$.

Sea $B = \{x \in X / v_x = 0\} = X - \bar{A}$ ~~[illegible]~~

~~Es claro (verificar) que (6) vale en $\mathring{B}$~~

~~(si $x \in B$, $F_t(x) = x$, $\forall t$~~

~~si $x \in \mathring{B}$, $F_t(y) = y$, $\forall t$, $\forall y$ en un entorno de x)~~

~~Por último, si $x \in B - B^\circ = \partial B$ entonces $\exists x_n \in A$ / $x_n \to x$~~

~~$\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow$ (6) vale en x ✓~~

Para $x \in B$, $\exists \mathcal{U} \ni x$ / ~~F_y~~ $F_t(y) = y$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ (6) vale en x $(0 = 0)$

$\Rightarrow$ (6) vale en x, $\forall x \in X$ ✓

(9) $L_v : \Omega(X) \to \Omega(X)$ satisface

$L_v = i(v) \circ d + d \circ i(v)$

(igualdad de Cartan)

<u>Dem</u> ambos miembros son derivaciones que conmutan con d

Como coinciden en $\Omega^0(X)$, son iguales.

$i(v) \circ d + d \circ i(v) \; (f) = \cancel{\langle v, df \rangle + d(v(f))}$

$= \cancel{v(f) + d(v(f))}$

$i(v)(f) = 0$ ($i(v)$ tiene grado -1)

$= i(v)\, df = \langle v, df \rangle = v(f) = L_v(f)$

(10) f) de próxima página

<u>Dem</u> Ejercicio.

Warner Prop 2.25

<u>Prop</u> $v \in \mathcal{V}(X)$

a) $L_v(f) = v(f)$, $\forall f \in \mathcal{D}(X)$

b) $L_v(u) = [v, u]$, $\forall u \in \mathcal{V}(X)$

c) $L_v : \Omega(X) \to \Omega(X)$
es una derivación de grado uno y conmuta con d.

d) $L_v : \Omega(X) \to \Omega(X)$ satisface

$$L_v = i(v) \circ d + d \circ i(v)$$

donde $i(v)$ es contracción (o producto interior) con v.

e) $\omega \in \Omega^p(X)$, $v_0, \dots, v_p \in \mathcal{V}(X)$ $\Rightarrow$

$$L_{v_0}\big(\omega(v_1, \dots, v_p)\big) = (L_{v_0}\omega)(v_1, \dots, v_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, L_{v_0} v_i, v_{i+1}, \dots, v_p)$$

(derivada de una función multilineal)

f) como en e),

$$d\omega(v_0, v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i \omega(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p)$$

(fórmula intrínseca para $d\omega$, en función de $[\,,\,]$)

<u>Dem</u> vimos todos los items.

Integración en variedades, Teorema de Stokes

Stokes $\displaystyle\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega$

Orientación Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dim n.
Sea $\mathcal{B}(V)$ el conjunto de bases ordenadas de V.
Definimos una relación de equivalencia en $\mathcal{B}(V)$:
$B_1 \sim B_2$ si la matriz de cambio de base
tiene $\det > 0$

Una orientación de V es una clase de equivalencia

Hay dos clases: fijo una base ordenada $B_0 \in \mathcal{B}(V)$
Dada otra base $B \in \mathcal{B}(V)$ sea $M(B)$ la matriz
de B_0-coordenadas de elementos de B.

~~Definimos $\rho_{B_0} : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}$, $B \longmapsto \det M(B)$~~

~~Entonces $\mathcal{B}(V)/\sim \; = \{\text{orientaciones}\} \xrightarrow{\cong}$~~

Entonces B tiene dos posibilidades

$B \sim B_0 \quad (\iff \det M(B) > 0)$

$B \not\sim B_0 \quad (\iff \qquad < 0)$

Dicho de otro modo: la aplicación

$$\mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}$$
$$B \longmapsto \det M(B)$$

establece una biyección

$$\mathrm{or}(V) = \mathcal{B}(V)/\sim \;\longrightarrow \{+1,-1\}$$

Obs orientación $\leftrightarrow$ componente conexa de $\Lambda^n V - \{0\} \cong \mathbb{R}-\{0\}$
de V

Si $\mu \in or(V)$ es una orientación en V, denotamos $-\mu$ la orientación opuesta

$\Rightarrow or(V) = \{\mu, -\mu\}$.

Sea X una variedad C^∞

Def Una <u>orientación de X</u> es una colección

$\{\mu_x\}_{x\in X}$, $\mu_x \in or(TX(x))$

Def Una <u>orientación continua de X</u> es una orientación $\{\mu_x\}_{x\in X}$ tal que existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ y campos de vectores $v_1^i, \dots, v_n^i$ en U_i tales que

~~$v^i(x)$, ...~~ - $v_1^i(x), \dots, v_n^i(x)$ base de $TX(x)$

- $\mu_x =$ ~~the~~ clase de $(v_1^i(x), \dots, v_n^i(x))$

Def X es <u>orientable</u> si existe una orientación continua de X

Obs Sea $\begin{matrix} E \\ \pi\downarrow \\ X \end{matrix}$ un fibrado vectorial. Mismas defs:

orientación de E: $\{\mu_x\}_{x\in X}$, $\mu_x \in or(E_x)$

orientación continua de E: ~~...~~

$\exists\ X = \bigcup_{i\in I} U_i$, $s_1^i, \dots, s_n^i$ secciones de E en U_i ...

<u>Ejercicio</u> $or(X) \underset{def}{=} \coprod or(TX(x))$ revestimiento doble de X.

(también para E)

- haz de orientación $Or(X)(U) =$ isomorfismos entre $\hat{\Lambda}^n(TX)|_U$ y ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathbb{Z}_2/U$

- haz de isomorfismos $Iso(A,B)$ entre dos haces.
orientación: sección global de $Iso(\hat{\Lambda}^n(TX), \mathbb{Z}_2)$

Particiones de la unidad

$\{\varphi_i\}_{i\in I}$, $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ C^∞

a) $\{ sop(\varphi_i) \}_{i\in I}$ es localmente finito

(existe cubrimiento $X = \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$ / $\mathcal{U}_j$

para cada j sólo finitos conjuntos $sop(\varphi_i)$

intersecan a $\mathcal{U}_j$)

b) $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1$ (para cada $x\in X$, la suma $\sum \varphi_i(x)$ es finita, por a))

$sop(\varphi) = \overline{(\varphi \neq 0)}$

Teo (X variedad C^∞, con base numerable de abiertos)
Sea $X = \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$ un cubrimiento abierto.

Entonces:

a) $\exists$ partición de 1 $\{\varphi_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ / $sop\, \varphi_i$ compacto

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists j \in J$, $sop\, \varphi_i \subset \mathcal{U}_j$

(b) $\exists$ partición de 1, $\{\psi_j\}_{j\in J}$

$sop\, \psi_j \subset \mathcal{U}_j$ $\forall j \in J$.)

Dem Warner, pag. 10.

~~**Def** X es orientable si $\Lambda^n(TX) - \{$sección nula$\}$ (dim $X = n$)~~

~~es conexo no es conexo~~

~~($\Leftrightarrow$ tiene dos componentes conexas)~~
~~ejercicio~~

Prop Son equivalentes

1) X es orientable

2) $\exists$ cubrimiento $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ por abiertos coordenados

~~tales~~ ~~φ^i~~ $\varphi^i : U_i \to \mathbb{R}^n$

tal que $\varphi^i \circ \varphi^{j-1}$ tiene ~~jacobiano~~

det jacobiano > 0 en todo punto.

3) $\exists$ ω n-forma en X nunca nula.

4) $\Lambda^n(TX) - \{0\}$ tiene dos componentes conexas.

DEM ejercicio (usa partición de la unidad)

Ej X variedad compleja $\Rightarrow$

X es orientable (como variedad real)

De Afirmo que si V es $\mathbb{C}$-espacio vectorial

entonces $V_{\mathbb{R}}$ tiene orientación canónica.

Sea $v_1, \dots, v_n$ una $\mathbb{C}$-base de V

$\Rightarrow$ ~~$v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots,$~~ $v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n$ ~~v_n, iv_n~~ es $\mathbb{R}$-base de V

Afirmo la clase de orientación de esta $\mathbb{R}$-base

no depende de la $\mathbb{C}$-base $v_1, \dots, v_n$

De calcular det > 0

Si X es variedad holomorfa

(U_j, φ^j) carta holomorfa $\quad \varphi^j : U_j \to \mathbb{C}^n$

$d\varphi^1, d\varphi^2, \dots, d\varphi^n, \; i\,d\varphi^1, \dots, i\,d\varphi^n$

definen orientación de ~~TX~~ $TX|_{U_j}$ TX en U_j

Por lo anterior, ~~establecer~~

las orientaciones en $U_i \cap U_j$ coinciden.

(Escribir la n-forma nunca nula en X)

Mirar el caso $n=1$ (Superficie de Riemann)

Otros ejemplos de variedades orientables

- grupo de Lie (es paralelizable) $\boxed{\text{paralelizable} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{orientable}}$
- $\dim X = n$, $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ subvariedad tal que X tiene campo normal nunca nulo
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ orientable $\iff$ n par (ejercicio)
- superficies no orientables como polígono con identificaciones.

<u>Fórmula de cambio de variables</u>

$A \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $B \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado

$A \xrightarrow{\varphi} B$ difeomorfismo $\qquad B = \varphi(A)$

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad \int_B f = \int_A (f \circ \varphi) \cdot |J\varphi|$$

Def Sea X una variedad (de dim n)

Sea $p \in \mathbb{N}$.

Un <u>p-simplex en X</u> es una función

$$\sigma : \Delta^p \longrightarrow X \qquad (\text{continua, dif.,})$$

Ej 0-simplex $=$ punto de X

1-simplex $= (\sigma : [0,1] \to X)$

2-simplex $= (\sigma : \triangle \to X)$

Una <u>p-cadena</u> en X es una combinación lineal formal

$$c = \sum_{i=1}^{N} a_i \sigma_i \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_i = p\text{-simplex}$$

Def Caras del símplice standard

Para cada p, i defino aplicaciones $(0 \leq i \leq p+1)$

$$k_i^p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p+1} \qquad \underline{i\text{-ésima cara de } \Delta^{p+1}}$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_p)$$

si $1 \leq i \leq p+1$

$$k_0^p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^{p+1}$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \left(1 - \sum_{i=1}^{p} x_i, x_1, \dots, x_p\right)$$

Ejemplos $p = 0, 1, 2$

Def Si $\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$ es un p-símplex

$$\Delta^{p-1} \xrightarrow{k_i^{p-1}} \Delta^p \xrightarrow{\sigma} X \qquad \sigma_i = \sigma \circ k_i^{p-1}$$

i-ésima cara de σ.

Def $$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_i = \text{borde de } \sigma$$

$\partial\sigma$ es una $(p-1)$-cadena.

Ptla. Extiendo ∂ a cadenas

- $k_i^{p+1} \circ k_j^p = k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p$, $p \geq 0$, $i \leq j$

Prop - $\partial(\partial c) = 0$ $\forall$ cadena c.

Dem Warner

Def Sea $\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$ un p-símplex diferenciable ($\dim X = n$)

Sea ω una p-forma en X definida en un entorno de $\sigma(\Delta^p)$. Definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^p} \sigma^*\omega$$

Si $c = \sum_{i=1}^{N} a_i \sigma_i$ es una p-cadena, definimos

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{\sigma_i} \omega \qquad \text{(linealidad)}$$

Teorema de Stokes I

Sea X una variedad de dimensión n.

Sea c una p-cadena diferenciable en X $(p \geq 1)$

y sea ω una $(p-1)$-forma definida en un entorno de la imagen (de los símplices que ~~flotan~~ aparecen en) c.

Entonces $$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Dem: basta verlo en caso c es un p-simplex $\sigma : \Delta^p \to X$

$$\int_{\partial\sigma} \omega \underset{def}{=} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\sigma^i} \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \sigma_i^*(\omega)$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} k_i^{p-1\,*}(\sigma^*\omega) \qquad \sigma_i = \sigma \circ k_i^{p-1}$$

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\Delta^p} \sigma^*(d\omega) = \int_{\Delta^p} d(\sigma^*\omega)$$

Denotamos $\eta = \sigma^*\omega$, es una $(p-1)$-forma en un abierto de $\mathbb{R}^p$ que contiene Δ^p

Tenemos que ver:

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} k_i^{p-1\,*}(\eta) \overset{①}{=} \int_{\Delta^p} d\eta$$

Puedo escribir $\eta = \sum_{j=1}^{p} a_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p$

a_j = funciones

Por linealidad, basta ver ① cuando η es uno de estos términos, ~~[illegible]~~

$\longrightarrow$ $d\eta = \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \cdot (-1)^{j-1} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$

Por otra parte, recordar $k_i^{p-1} : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$

$$(y_1, \dots, y_{p-1}) \longmapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{p-1})$$

o sea, $x_j = y_j$ $j = 1, 2, \dots, i-1$

$x_i = 0$

$x_j = y_{j-1}$ $j = i+1, \dots, p$

$k_0^{p-1}(y_1, \dots, y_{p-1}) = (1 - \sum y_i, y_1, \dots, y_{p-1})$

$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i$

$x_2 = y_1$

$\vdots$

$x_p = y_{p-1}$

$$k_i^{p-1\,*}(\eta) = k_i^{p-1\,*}(\underset{\text{sup. } \eta}{a_p} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p-1}) = \cancel{\cdots}$$

0 si $1 \le i \le p-1$

$a(y_1, \dots, y_{p-1}, 0) \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{p-1}$ si $i = p$

para $i = 0$: $a(1 - \sum_{i=1}^{p-1} y_i, y_1, \dots, y_{p-1}) \, (-1) \left(\sum_{i=1}^{p-1} dy_i\right) \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{p-2}$

$$k_0^*(y) = a(1-\sum_{i=1}^{p-1} y_i, y_1, \dots, y_{p-1}) \cdot (-1)^{p-1} \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{p-1}$$

Lado izquierdo de ①:

$$\int_{\Delta^{p-1}} \left[a(1-\sum y_i, y_1, \dots, y_{p-1}) \cdot (-1)^{p-1} + (-1)^{p} a(y_1, \dots, y_{p-1}, 0) \right] dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{p-1}$$

$$\stackrel{?}{=} \int_{\Delta^p} \frac{\partial a}{\partial x_p} \cdot (-1)^{p-1} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

Observaciones sin demostración (sólo Stokes, integración)

Stokes para dominios regulares con borde

Discusión de teoría de la medida en variedades

(Ref.: Bourbaki) $\Rightarrow$ $I_w(f) = \int_X f.w$ ⊙

Discusión de Stokes en variedad Riemanniana

Forma de volumen

$$w = \sqrt{g}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$g = \det\left(\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle\right)_{i,j}$ $\quad$ $(\Rightarrow g' = J^2 . g$ $\quad$ $J =$ jacobiano sup. > 0

$\sqrt{g'} = J . g$ ✓ $\quad$ (orientado)

Ejercicio de Warner: calcular w para hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$, vector normal, ...

⊙ w es una forma de volumen si $w(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$

~~dos formas de vol~~

una forma de vol. genera $\Omega^n(X)$ sobre $\mathcal{D}(X)$

Dos casos

- $w =$ forma de volumen en variedad Riemanniana
- $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ $\quad$ w_i base de 1-formas invariantes en grupo de Lie G

($\Rightarrow \exists$ medida invariante, usa ~~Haar~~ cierto para grupos topológicos + generales)

Teorema de De Rham

$\omega \in \Omega^p(X)$ se dice cerrada si $d\omega = 0 \in \Omega^{p+1}(X)$

exacta si $\exists\, \eta \in \Omega^{p-1}(X) \,/\, \omega = d\eta$

ω exacta $\Rightarrow$ ω cerrada

dem: $\omega = d\eta \Rightarrow d\omega = d(d\eta) = 0$ $\quad (d^2 = 0)$

La recíproca es falsa en general.

Complejo de De Rham de X:

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(X) \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(X)$$

$Z^p(X)$ = p-formas cerradas en X
$= \ker d_p$

$E^p(X)$ = p-formas exactas en X
$= \operatorname{im} d_{p-1}$

$H_p(X) \times H^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$
$([c], [\omega]) \longmapsto \int_c \omega$
bien definido por Stokes
Bilineal.
De Rham: no-degenerada
$\Rightarrow H^p(X) \cong H_p(X)^*$

Sabemos además que $E^p(X) \subset Z^p(X)$

Dem: local: Poincaré
global: haces

Def: $H^p(X)_{DR} = Z^p(X) / E^p(X)$ $\quad$ ($\mathbb{R}$-espacio vectorial)

p-ésimo espacio de cohomología de De Rham.

Teo: si X es contráctil (p. ej. $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto estrellado)

entonces $H^p(X) = 0$ $\quad \forall\, p = 0, 1, \ldots, n$

(o sea, vale la recíproca de antes en X)

Idea: la dimensión de $H^p(X)$ mide el número de "agujeros en dimensión p" de X

Ej $X = S^1$ $\quad \omega$ = 1-forma "angular" $\quad ([\omega] \neq 0 \in H^1(S^1))$
ω es cerrada, no es exacta

Por lo tanto tenemos un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc}
S_0(X)^* & \xrightarrow{\partial_0^*} & S_1(X)^* & \xrightarrow{\partial_1^*} & S_2(X)^* & \to & \cdots & \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} & S_n^*(X) \to \\
I \uparrow & & I\uparrow & & I\uparrow & & & & \uparrow \\
\Omega^0(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(X) & \to & \cdots & \to & \Omega^n(X) \to 0
\end{array}$$

del cual resultan aplicaciones lineales entre los respectivos espacios de homología:

$$\bar{I}_r : H^r(X) \longrightarrow H^r_{sing}(X) \underset{def}{=} \ker \partial_r^* / \mathrm{im}\, \partial_{r-1}^*$$

(si $[\omega] \in H^r(X)$ es la clase de la forma cerrada ω,

$$(\bar{I}_r[\omega])([c]) = \int_c \omega \quad)$$

Teorema de De Rham: $\bar{I}_r$ iso $\forall r \in \mathbb{N}$.

Obs Sea $\omega \in \Omega^r(X)$.
Para cada $c \in S_r(X)$, la integral $\int_c \omega \in \mathbb{R}$
se llama un periodo de ω

Sea $[c_1], [c_2], \ldots, [c_N]$ una base de ~~$H^r_{sing}(X)$~~ $H_r(X)$

De Rham dice: para ω forma cerrada

1) ω exacta $\Leftrightarrow$ los periodos de ω: $\int_{c_1}\omega, \ldots, \int_{c_N}\omega$ son cero
(inyectividad de $\bar{I}_r$)

2) dados números reales $\pi_1, \ldots, \pi_N$ existe $\omega \in \Omega^r(X)$ cerrada
(única modulo adición de exactas)
tal que $\int_{c_i}\omega = \pi_i, \quad i = 1, \ldots, N$

Ej $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$\sigma : \Delta^1 = [0,1] \longrightarrow X$

$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

es un 1-simplex, $\partial\sigma = 0 \Rightarrow [\sigma] \in H_1(X)$

De hecho, $[\sigma]$ es base de $H^1(X) \cong \mathbb{R}$

La forma angular $\eta = x\,dy - y\,dx$ tiene

periodo $\int_\sigma \eta \neq 0$

Toda forma cerrada ω definida en X

se escribe $\omega = \lambda . \eta + d\mu$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

μ función

$\left(\lambda = \dfrac{\int_\sigma \omega}{\int_\sigma \eta} \right)$

Ej $X = S^1 \times S^1$ 

σ_1, σ_2 base de $H_1(X)$

Distribuciones - Teo. de Frobenius

Sea X una variedad C^∞ de dim n.

Def Una <u>distribución</u> de <u>rango r</u> en X es una colección $\Delta = \{\Delta(x)\}_{x\in X}$, donde $\Delta(x) \subset TX(x)$ es un subespacio lineal de dim r, para cada $x \in X$.

Ej Sean $v_1, \dots, v_r$ campos de vectores en X tales que $v_1(x), \dots, v_r(x) \in TX(x)$ son l.i. $\forall x \in X$.

Sea $\Delta(x) = \langle v_1(x), \dots, v_r(x) \rangle$

$$\Delta = \{\Delta(x)\}_{x\in X} \text{ es una distribución}$$

(generada por los campos $v_1, \dots, v_r$)

Def Sea Δ una distribución de rango r en X.
Decimos que Δ es C^∞ en $x \in X$ si existen campos de vectores $v_1, \dots, v_r$ C^∞ en un entorno U de x tales que

$\Delta(y) = \langle v_1(y), \dots, v_r(y) \rangle \quad \forall y \in U.$

Decimos que Δ es C^∞ en X si es C^∞ en $\cancel{\forall}x$, $\forall x \in X$.

Def Sea Δ una r-distribución C^∞ en X.

Sea $\varphi : Y \to X$ una subvariedad paramétrica de X (φ inyectiva, $d\varphi$ inyectiva), $\dim Y = s$.

Decimos que (Y, φ) es variedad integral de Δ si $d\varphi(y)(T_Y(y)) \subset \Delta(\varphi(y))$, $\forall y \in Y$.

Obs $\Rightarrow s \leq r$.

Def Δ es ~~totalmente~~ completamente integrable si por todo punto $x \in X$ pasa una variedad integral de Δ de dimensión r.

Ej Consideremos una distribución de 2-planos en $\mathbb{R}^3$.

$p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\Delta = \{\Delta(p)\}_{p \in \mathbb{R}^3}$ generada por dos campos de vectores u, v en $\mathbb{R}^3$

$$u(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= (1, 0, f(x,y))$$

$$v(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial z} = (0, 1, g(x,y))$$

$$\Delta_p = \langle u, v \rangle = \left\{ r \cdot \frac{\partial}{\partial x} + s\frac{\partial}{\partial y} + (rf + sg)\frac{\partial}{\partial z},\ r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Sup. $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ abierto) es variedad integral. ~~pequeño~~ $\varphi = \varphi(t_1, t_2)$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right\rangle = \langle u, v \rangle \text{ en } p = \varphi(t_1, t_2)$$

Puedo suponer φ es de la forma

~~[illegible]~~ $\varphi(x,y) = (x, y, \alpha(x,y))$

$$\langle (1,0,\tfrac{\partial\alpha}{\partial x}), (0,1,\tfrac{\partial\alpha}{\partial y}) \rangle = \langle (1,0,f), (0,1,g) \rangle$$

en $(x,y,\alpha(x,y))$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} f(x,y,\alpha(x,y)) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) \\ g(x,y,\alpha(x,y)) &= \frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y) \end{aligned}\right\} \circledast$$

(Si f, g conocidas, hallar α
Es una ecuación en derivadas parciales
de primer orden)

Supongamos que existe una solución $\alpha(x,y)$

Como $\boxed{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}}$, resulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(f(x,y,\alpha(x,y))\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(g(x,y,\alpha(x,y))\Big) \quad \text{o sea,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\alpha(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\alpha(x,y))\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\alpha(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\alpha(x,y))\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x} \quad ; \text{ usando } \circledast :$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\alpha(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\alpha(x,y))\cdot f(x,y,\alpha(x,y)) =$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\alpha(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\alpha(x,y))\cdot g(x,y,\alpha(x,y))$$

Si supongo que por todo (x,y,z) pasa una variedad integral entonces puedo reemplazar $\alpha(x,y)=z$ y queda

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot f = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot g}$$

condición necesaria de integrabilidad.

Frobenius $\Rightarrow$ esta condición también es suficiente

Mas general:

Teo. Frobenius (versión clásica)

Consideramos una ecuación diferencial del tipo

$$(*) \qquad y' = F(x, y(x))$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ (variable independiente)

$y = (y_1, \dots, y_m) \in V \subset \mathbb{R}^m$ (incógnita) $y = y(x)$

$y : U \to V$

$y'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad y'(x) = \mathrm{Jac}(y)(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$y'(x) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$$

$F : U \times V \to \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \mathscr{C}^\infty$

$$(*) \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = F_{ij}(x, y(x)) \qquad \begin{pmatrix}\text{sistema de EDP} \\ \text{de 1}^{\text{er}} \text{ orden}\end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots, m$
$j = 1, \dots, n$

Condición necesaria para integrabilidad:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(F_{ij}(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(F_{ik}(x,y)\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}(x,y) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial F_{ij}}{\partial y_h}(x,y) \cdot \frac{\partial y_h}{\partial x_k} =$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j}(x,y) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial F_{ik}}{\partial y_h}(x,y) \frac{\partial y_h}{\partial x_j}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial F_{ij}}{\partial y_h} \cdot F_{hk} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial F_{ik}}{\partial y_h} \cdot F_{h\cancel{k}j}$$

$(**)$ (condición de integrabilidad de Frobenius) $\forall i,j,k$

El Teo. dice que si F satisface $(**)$ entonces

$\forall (x_0, y_0) \in U \times V$, $\exists!\ y = y(x) : U \to V$ /

$y(x_0) = y_0$ satisfaciendo $(*)$.

Teo. Frobenius (versión geométrica)

Sea X una variedad C^∞ de dim n,

sea Δ una distribución de rango r en X.

Son equivalentes:

a) Δ es completamente integrable

b) Δ es involutiva (si u, v son campos de vectores en X tales que $u(x), v(x) \in \Delta(x)$ $\forall x \in X$ entonces $[u,v](x) \in \Delta(x)$, $\forall x \in X$, o sea, Δ es cerrado por corchete)

Vamos a demostrar Frobenius (versión 2)

para lo cual necesitamos algunos resultados ~~98~~

previos sobre campos de vectores.

Teo/ ~~Prop~~ Sea X una variedad C^∞, $p \in X$.

Sea v un campo de vectores en X con $v(p) \neq 0$.

Entonces existe un sistema de coordenadas

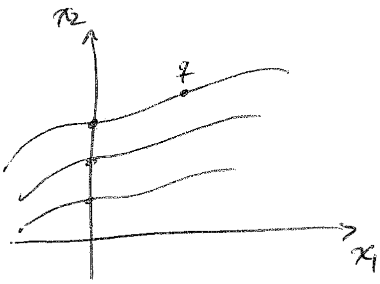
(U, φ), $\varphi(p) = 0$, tal que $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ en U.

LO VIERON EN LA PRÁCTICA.

Dem Podemos suponer X es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p = 0$,

con coordenadas $x_1, \dots, x_n$ / $v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0$

Idea ($n=2$)



nueva coordenada

miro curva integral por $(0,b)$

coordenadas de q : (t,b)

donde t = tiempo que tardo

en llegar a q.

~~...~~

recordar flujo, etc. generado por v.

$\gamma_x : I \to X$ curva integral de v por x.

$\gamma_x(0) = x$, $\dot{\gamma}_x(0) = v(x)$

$f_t : X \to X$ $\quad f_t(x) = \gamma_x(t)$

f_t difeo, $f_t^{-1} = f_{-t}$, $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$

Defino $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$$

Afirmo: $dF(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0\right) = v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 \quad i \geq 2$

$\Rightarrow F$ difeo local

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ u campo de vectores

$$dF(u)(\varphi) = u(\varphi \circ F)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad dF\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi \circ F) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(F(x_1+h, x_2, \dots, x_n)) - \varphi(F(x_1, \dots, x_n))\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(f_{x_1+h}(0, x_2, \dots, x_n)) - \varphi(F(x_1, \dots, x_n))\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(f_h f_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) - \varphi(F(x_1, \dots, x_n))\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\varphi(f_h(F(x_1, \dots, x_n))) - \varphi(F(x_1, \dots, x_n))\right]$$

$$= \cancel{u(\varphi)(F(x))} = \overset{v(\varphi)}{\cancel{u(\varphi)}}(F(x)) \implies \boxed{dF\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = v \circ F}$$

En part. $dF(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0\right) = v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0$

habíamos supuesto.

afirmo: $dF(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$, $i \geq 2$

$$dF(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right)(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 (\varphi \circ F) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\varphi \circ F(0, \dots, h, 0, \dots, 0) - \varphi \circ F(0)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\varphi(0, \dots, h, 0, \dots, 0) - \varphi(0)\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big|_0 \quad \checkmark$$

$$\implies dF(0) = id \implies F \text{ difeo. local}$$

La carta nueva que sirve es F^{-1}:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^n & \xrightarrow{dF} & T\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow v \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

vimos $dF \circ \frac{\partial}{\partial x_1} = v \circ F$

$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = v$

~~Para esto se usa la hipótesis $[X_i, X_j] = 0$~~

Necesito:

~~Afirm~~ $\boxed{\text{Prop}}$ ⊙ Sean u, v campos de vectores en X y sean $(f_t)_t$, $(g_t)_t$ los correspondientes grupos a un parámetro. Son equivalentes:

a) $[u, v] = 0$

b) $f_t \circ g_s = g_s \circ f_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall s$

~~Por la Prop. puedo cambiar el orden de las x_i $(i=1, \dots, r)$ en la def. de F $\Rightarrow$ la afirmación.~~

~~Dem de la Prop.~~

Dem de Prop ⊙:

Va a salir de otras Props, de interés independiente:

~~102'~~ 100'

Def $\varphi : X \to X$ difeo, $v \in \mathcal{V}(X)$

$\varphi_* v \in \mathcal{V}(X)$ definido por

$$\varphi_* v(x) = d\varphi(y)\cdot v(y), \quad y = \varphi^{-1}(x)$$

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, bend left, "\varphi_* v"] & X \arrow[u, bend right, "v"'] \end{tikzcd}$$

o sea, $\varphi_* v(\varphi(x)) = d\varphi(x)\cdot v(x) \quad \forall x.$

$\Rightarrow$ v, $\varphi_* v$ están φ-relacionados.

Prop 1 $\varphi : X \to X$ difeo, $v \in \mathcal{V}(X)$

Sea $\{\psi_t\}_t$ el grupo generado por v.

Entonces el grupo generado por $\varphi_* v$ es

$$\{\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}\}_t$$

Dem Es claro que forman un grupo de difeos.
Veamos que inducen el campo de vectores $\varphi_* v$.
Sea $x \in X$. Sabemos que $v(x)$ es tangente a la curva $\psi_t(x)$ en $t=0$. Para $y = \varphi^{-1}(x)$, $v(y)$ es tangente a la curva $\psi_t(y)$ en $t=0$.

$\Rightarrow$ $d\varphi(y)\cdot v(y)$ es tangente a la curva $\varphi(\psi_t(y))$ en $t=0$

$\Rightarrow$ $\varphi_* v(x)$ es tangente a la curva $\varphi \psi_t \varphi^{-1}(x)$ en $t=0$.

Cor 1 v es invariante por φ (o sea, $\varphi_* v = v$)

$\Leftrightarrow$ φ conmuta con ψ_t, $\forall t$

Dem $\varphi_* v = v \Leftrightarrow \varphi \psi_t \varphi^{-1} = \psi_t, \ \forall t \Leftrightarrow$ conmutan

Cor 2 Si v genera $\{\psi_t\}_t$ entonces $(\psi_t)_* v = v$, $\forall t$.

Prop: $u, v \in \mathfrak{X}(X)$

$\{\varphi_t\}$ grupo uni-paramétrico inducido por u.

Son equivalentes:

a) $L_u(v) = 0$

b) $(\varphi_t)_*(v) = v, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(o sea, v es invariante por la acción de $\mathbb{R}$ en X inducida por u)

Dem: $$L_u(v) \underset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t)_*(v) - v}{t}$$

b) $\Rightarrow$ a): claro

a) $\Rightarrow$ b): sea $x \in X$

$$L_u(v)_x = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t)_*(v)_x - v_x}{t}$$

Considero la función $\alpha : \mathbb{R} \to TX(x)$

$$\alpha(t) = (\varphi_t)_*(v)_x$$

Basta con ver que α es constante.

Para esto, basta con ver que la derivada de α es idénticamente nula.

Sea $t \in \mathbb{R}$. Quiero ver: $\alpha'(t) = 0$

$$\alpha'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\varphi_{t+h})_*(v)_x - (\varphi_t)_*(v)_x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ (\varphi_t)_* \left(\frac{(\varphi_h)_*(v) - v}{h} \right)_x \right. \underset{a)}{=} 0 \quad ✓$$

$(\varphi_{t+h} = \varphi_t \circ \varphi_h)$

Obs Prop 2 vale, más en general, reemplazando v por cualquier campo de tensores τ, con la misma dem.

$L_u(\tau) = 0 \iff (\varphi_t)_*(\tau) = \tau, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Ej $\tau = f \in \mathcal{D}(X)$ una función

$L_u(f) = 0 \ (\iff u(f) = 0) \iff (\varphi_t)_*(f) = f, \ \forall t$

$\iff$ f es constante en cada órbita $\{\varphi_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$, $x \in X$

("f es una integral primera de u")

Dem. de Prop ⊙ (pág. 100) :

$[u, v] = 0 \underset{\substack{\text{(lo vimos antes)} \\ L_u(v) = [u,v]}}{\iff} L_u(v) = 0 \underset{\text{Prop 2}}{\iff} (\varphi_t)_* v = v, \ \forall t$

$\underset{\substack{\text{cor 1} \\ \varphi = \varphi_t}}{\iff}$ φ_t conmuta con ψ_s $(\forall t, \forall s)$ ✓

Dem. de Frobenius (versión geométrica)

Necesito otra cosa:

recordar que si $X \xrightarrow{f} Y$ C^∞, $u \in \mathcal{V}(X)$, $v \in \mathcal{V}(Y)$

decimos que u, v están f-relacionados si

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "df"] \arrow[d, shift left] & TY \arrow[d, shift right] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[u, bend left, "u"] & Y \arrow[u, bend right, "v"'] \end{tikzcd} \qquad df \circ u = v \circ f$$

Prop $X \xrightarrow{f} Y$, $u, u' \in \mathcal{V}(X)$, $v, v' \in \mathcal{V}(Y)$

$$\left.\begin{array}{l} u, v \ f\text{-rel.} \\ u', v' \ f\text{-rel} \end{array}\right\} \Rightarrow [u,u'], [v,v'] \ f\text{-rel.}$$

Dem ejercicio (o ver Spivak o Warner)

Dem a) $\Rightarrow$ b) Sup. Δ completamente integrable.

Sean $u, u' \in \mathcal{V}(X)$, $u(x), u'(x) \in \Delta(x)$, $\forall x \in X$.

Queremos ver $[u,u'](x) \in \Delta(x)$.

Sea $f: Y \to X$ variedad integral
$f(y) = x$, $\dim Y = r$

subvariedad $\Rightarrow \exists\, v, v' \in \mathcal{V}(Y)$ / v, u f-rel.
v', u' f-rel.

$\Rightarrow [v,v'], [u,u']$ f-rel.

$\Rightarrow df(y)[v,v'](y) = [u,u'](x)$

$\Rightarrow [u,u'](x) \in \Delta(x)$ (ya que $\operatorname{im} df(y) \subset \Delta(x)$)

Teo 2
~~Prop~~ X variedad C^∞, $p \in X$.

Sean $v_1, \dots, v_r$ campos de vectores definidos C^∞ en un entorno de p y l.i. en todo punto. Son equiv.

a) Existe una carta (U, φ) de p tal que $v_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ en U, $i = 1, \dots, r$

b) $[v_i, v_j] = 0$ en U. $1 \le i, j \le r$

Dem b) $\Leftarrow$ a) porque $[\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j}] = 0$.

a) $\Leftarrow$ b) Como en la dem. de Teo. 1, puedo suponer $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $p = 0$

$v_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$ $i = 1, \dots, r$.

Sea $f_t^i : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$

el grupo a un parámetro de difeomorfismos generado por v_i.

Consideramos, como en Teo. 1.

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x_1, \dots, x_n) = f^1_{x_1}\left(f^2_{x_2} \dots \left(f^r_{x_r}(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)\right)\right)$

Como antes,

$dF(0) = id$

$dF \circ \frac{\partial}{\partial x_1} = v_1 \circ F$

Afirmo: $dF \circ \frac{\partial}{\partial x_i} = v_i \circ F$ $i = 1, \dots, r$

Esto sale de la hipótesis $[v_i, v_j] = 0$ y la Prop anterior ✓ (ya que puedo cambiar el orden de los $f^i_{x_i}$)

Prop 4 $u, v \in \mathcal{V}(X)$

$\{\varphi_t\}$ grupo generado por u

Entonces $[u,v] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(v - (\varphi_t)_* v\right)$

o sea,

$$[u,v](x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(v(x) - (\varphi_t)_* v(x)\right) \in TX(x)$$

Dem: próxima clase. (Y ver derivada de Lie)

Lema (i) $\lim_{t\to 0} \left(f(\varphi_t(x)) - f(x)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f\varphi_t(x)\right) = v(f)(x)$

(ii) $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f : I \times X \to \mathbb{R}$, $f(0,x) = 0$, $\forall x \in X$

f C^∞

$\Rightarrow \exists\, g : I \times X \to \mathbb{R}$ C^∞

tq $f(t,x) = t \cdot g(t,x)$ $\forall t, x$

Además, $g(0,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(0,x)$

Dem Tomar $g(t,x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(ts, x)\, ds$

(iii) $v \in \mathcal{V}(X)$, grupo $\{\varphi_t\}_t$, $f : X \to \mathbb{R}$ C^∞

Entonces existe $g : I \times X \to \mathbb{R}$ C^∞ tal que

$*$ $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$ $\quad g_t(x) = g(t,x)$

$**$ $g_0 = v(f)$

Dem Considero $f(t,x) = f(\varphi_t(x)) - f(x)$

Como $f(0,x) = 0$, por (ii), $\exists\, g$ satisfaciendo $*$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\varphi_t(x)) - f(x)\right) = \lim_{t\to 0} g_t(x) = g_0(x)$$

$\shortparallel$ (i)

$v(f)(x)$

Dem. de Prop 4.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, tomemos g_t /

$$f \circ \psi_t = f + t\, g_t \quad , \quad g_0 = v(f)$$

Sea $x(t) = \psi_t^{-1}(x)$

$$\Big((\psi_t)_* v(x) \Big)(f) = v(f \circ \psi_t)(x(t)) =$$

$$= v(f)(x(t)) + t\, v(g_t)(x(t))$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \big(v - (\psi_t)_* v \big)(x)(f) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(v(f)(x) - v(f)(x(t)) \big) - \lim_{t\to 0} v(g_t)(x(t))$$

$$\underset{(i)}{=} u(x)\big(v(f)\big) - v(x)(g_0)$$

$$= u(x)\big(v(f)\big) - v(x)\big(u(f)\big) = [u, v](x)\ (f)$$

Cor 5 Con la misma notación,

$$(\psi_s)_*[u,v] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\psi_s)_* v - (\psi_{s+t})_* v \right)$$

Dem Aplico la Prop. a u, $(\psi_s)_* v$

$$[u, (\psi_s)_* v] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\psi_s)_* v - (\psi_t)_* (\psi_s)_* v \right)$$

$\shortparallel$

$[(\psi_s)_* u, (\psi_s)_* v]$

$\shortparallel$

$(\psi_s)_*[u,v]$

Obs 6 El Cor. se escribe

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \left((\psi_t)_* v \right) = -(\psi_s)_*[u,v]$$

Cor 7 Sean $u, v \in \mathcal{V}(X)$

sean $\{\psi_t\}_t$, $\{\varphi_t\}_t$ los grupos que generan.

Son equivalentes

a) $[u,v]=0$

b) $\psi_t \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_t$, $\forall t$

Dem b) $\Rightarrow$ a) b) $\underset{2}{\Rightarrow}$ v es invariante por ψ_t, $\forall t$ (p. 102^2)

$\underset{4}{\Rightarrow}$ $[u,v]=0$ ✓

a) $\Rightarrow$ b) a) $\underset{6}{\Rightarrow}$ $\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\left((\psi_t)_* v\right) = 0 \quad \forall s$

$\Rightarrow$ $(\psi_t)_* v = cte = v$ $\Rightarrow$ v es ψ_t-invariante $\forall t$

$\underset{2}{\Rightarrow}$ b)

b) ⇒ a) Vamos a ver que $\forall x \in X$, $\exists$ entorno $\mathcal{U}$ de x

y generadores $v_1, \dots, v_r$ de Δ en $\mathcal{U}$ tales que

$$[v_i, v_j] = 0 \quad \forall i, j$$

Podemos suponer X es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y $x = 0$,

$v_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$, $i = 1, \dots, r$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ $\quad \pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$

$\Rightarrow \quad \pi : \Delta(0) \to \mathbb{R}^r$ iso

$\Rightarrow \quad \pi : \Delta(q) \to \mathbb{R}^r$ iso $\forall q$ en un entorno de 0.

$\Rightarrow \exists$ base $u_1(q), \dots, u_r(q)$ de $\Delta(q)$ / ~~$\pi(u_i(q)) = e_i$~~

$\Rightarrow \quad \pi_* u_i(q) = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\pi(q)}$, $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow \quad u_i, \frac{\partial}{\partial t_i}$ π-relacionados

$\Rightarrow \quad [u_i, u_j]$, $\left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right]$ π-relacionados

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ Como Δ es cerrada por corchetes, $[u_i, u_j](q) \in \Delta(q)$ $\forall q$

y como $\pi|_{\Delta(q)}$ es inyectiva, resulta $\underline{[u_i, u_j] \equiv 0}$

como se afirmaba. $\underline{\text{Volviendo a b) ⇒ a) de Frobenius:}}$

Por Teo. 3, $\exists$ coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi)$ / $v_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ en $\mathcal{U}$, $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow$ variedades integrales son $\underline{\varphi_j = \text{cte}, \; j = r+1, \dots, n}$

(discutir foliación standard de $\mathbb{R}^n$)

$\Delta = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \rangle$

9. Otra demostración (creo que mejor) de b) ⇒ a) 17'

Como antes, quiero ver que $\forall x \in X$, $\exists\, \mathcal{U} \ni x$ y generadores $v_1, \dots, v_r$ de Δ en $\mathcal{U}$ / $[v_i, v_j] = 0$ en $\mathcal{U}$, $\forall i, j$.

Puedo suponer $X \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Sea $u_1, \dots, u_r$ base de Δ en X

- $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $i = 1, \dots, r$

$a = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le n}}$ tiene rango máximo r en todo X.

Para $J \subset \{1, \dots, n\}$, $|J| = r$ sea

$a_J = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le r \\ j \in J}}$ = J-ésimo menor de a

$X_J = \{x \in X,\ \det a_J \neq 0\}$ $\rightarrow$ $X = \bigcup_J X_J$

Vamos a construir generadores $v_1, \dots, v_r$ requeridos, en cada abierto X_J (lo cual alcanza para la dem.)

Sup. p. ej. $J = \{1, \dots, r\}$

Sea $b = a_J^{-1} \cdot a$ $\rightarrow$ $b_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(X_J)$

- en notación matricial: $u = a \cdot \partial$ $\quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $v \underset{\text{def}}{=} a_J^{-1} \cdot u = a_J^{-1} a\, \partial = b \cdot \partial$

Es claro que v es otra base de Δ, en X_J.

Como $b_{ij} = \delta_{ij}$ para $1 \le i, j \le r$, tenemos

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j > r} b_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, r$$

Afirmo: $[v_i, v_j] = 0$, $1 \le i, j \le r$ ✓

~~$\Rightarrow v_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \Rightarrow \{y_i = cte \quad i = 1, \dots, r\}$ variedades integrales~~

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k>r} b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad , \quad v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k>r} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$[v_i, v_j] = \underset{\overset{\|}{0}}{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]} + \sum_{k>r} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}\right] + \sum_{k>r} \left[b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

$$+ \sum_{\substack{k>r \\ k>r}} \left[b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}\right] \qquad = \cdot$$

$$[fu, gv] = fg[u,v] + f.u(g).v - g.v(f)u$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = b_{jk} \underset{\overset{\|}{0}}{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right]} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

~~b_{ik}~~

$$\left[b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = b_{ik} \underset{\overset{\|}{0}}{\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\left[b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}, b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = b_{ik} b_{jk} \underset{\overset{\|}{0}}{\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right]} +$$

$$b_{ik} . \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - b_{jk} \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\cdot \Rightarrow \quad [v_i, v_j] = \sum_{k>r} c_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad .$$

Sabemos: $[v_i, v_j] = \sum_{l=1}^{r} d_{ij}^l \, v_l \quad , \quad 1 \le i,j \le r$

$$\Rightarrow \sum_{k>r} c_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{r} d_{ij}^l \left(\frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{k>r} b_{lk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

$$\Rightarrow d_{ij}^l = 0 \, , \; \forall i,j,l \quad \Rightarrow [v_i, v_j] = 0 \, , \; \forall i,j \quad \checkmark$$

Para terminar la dem. de Frobenius:

$v_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Rightarrow \{\varphi_i = cte, \; \underset{i>r}{i} \}$ son las variedades integrales buscadas.

Para deducir Frob. clásico de Frob. geométrico:

dado el sistema $y' = F(x,y)$

o sea, $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} = F_{ij}(x, y(x))$ $\quad i=1,\dots,m$; $\; j=1,\dots,n$

(función incógnita $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

consideramos la distribución Δ de rango n en $\mathbb{R}^{n+m}$

definida por los campos

$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} F_{ij}(x,y) \frac{\partial}{\partial y_i} \quad , \quad j=1,\dots,n$$

Una ~~solución~~ variedad integral viene dada por

$$\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^n$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad \begin{array}{l} x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t)) \\ y(t) = (y_1(t),\dots,y_m(t)) \\ t = (t_1,\dots,t_n) \end{array}$$

tal que $\quad \operatorname{im} d\gamma(t) = \langle v_1(\gamma(t)),\dots,v_n(\gamma(t)) \rangle \;, \; \forall t \in U$.

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t_j} = v_j(\gamma(t)) \quad \forall j=1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} F_{ij}(x(t), y(t)) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_j = t_j \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} F_{ij}(t, y(t)) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = F_{ij}(t, y(t)) \quad \forall i,j} \quad \checkmark$$

chequear: $[v_j, v_k] \in \langle v_h \rangle \iff$ condición de compatibilidad

$$[v_j, v_k] = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_i F_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}\,,\ \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_h F_{hk}\frac{\partial}{\partial y_h}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] + \sum_h \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, F_{hk}\frac{\partial}{\partial y_h}\right] - \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, F_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}\right]$$

$$+ \sum_{i,h} \left[F_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}, F_{hk}\frac{\partial}{\partial y_h}\right]$$

$$= 0 + \sum_h \frac{\partial F_{hk}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial y_h} - \sum_i \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$+ \sum_{i,h} F_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}(F_{hk})\cdot\frac{\partial}{\partial y_h} - F_{hk}\frac{\partial}{\partial y_h}(F_{ij})\frac{\partial}{\partial y_i} = 0$$

$\Big([f\cdot u, g\cdot v] = f\cdot g\cdot[u,v] + f\,u(g)\,v - g\cdot v(f)\cdot u\Big)$

$$\sum_h \frac{\partial F_{hk}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_h} - \sum_h \frac{\partial F_{hj}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_h}$$

$$+ \sum_h \Big(\sum_i F_{ij}\frac{\partial F_{hk}}{\partial y_i}\Big)\frac{\partial}{\partial y_h} - \sum_h\sum_i F_{ik}\frac{\partial F_{hj}}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_h}$$

$(i \leftrightarrow h)$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F_{hk}}{\partial x_j} - \cancel{\sum_i F_{ik}\frac{\partial F_{hj}}{\partial y_i}} \sum_i \frac{\partial F_{hk}}{\partial y_i}F_{ij} =$$

$$\frac{\partial F_{hj}}{\partial x_k} - \sum_i \frac{\partial F_{hj}}{\partial y_i}\cdot F_{ik}$$

(comparar con pág. 97)

Resolución explícita, construcción de variedades integrales vía sistema de ODE: ver Malliavin p.134

Def Foliación en X de dim r: partición $X = \coprod_{i\in I} \Sigma_i$

Σ_i: subvariedad inmersa $\subset X$, $\dim \Sigma_i = r$ $\forall i$

Σ_i = "hoja"

Teo Δ distribución de rango r en X

Δ involutiva $\Longrightarrow$ induce foliación en X (Σ_i = subvariedades integrales maximales)

ver Warner

Más detalles: Malliavin.

Comentario sobre Frobenius.

Sea Δ una r-distrib. C^∞ en X

Considero $$V = \coprod_{x\in X} \Delta(x) \subset TX$$

Entonces V es un fibrado vectorial de rango r. (sub-fibrado de TX)

Δ involutiva $\iff [V,V] \subset V$

(tenemos $[\ ,\ ] : T\cancel{X} \times T\cancel{X} \to T\cancel{X}$)

Frobenius vía formas diferenciales.

Sea Δ una r-distribución y sea $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$

Decimos que la ω anula a Δ (escrito $\omega(\Delta)=0$)

si $\omega(x)(\Delta(x)) = 0$, $\forall x \in X$ $\quad$ ($\omega(x) : TX(x) \to \mathbb{R}$ lineal)

o sea, $\Delta(x) \subset \ker \omega(x)$.

Sean $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in \mathcal{E}^1(X)$

Decimos que generan Δ si

$$\Delta(x) = \bigcap_{i=1}^{n-r} \ker \omega_i(x), \quad \forall x \in X$$

Escribimos $\Delta = (\omega_1 = \dots = \omega_{n-r} = 0)$

Recíprocamente, si $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in \mathcal{E}^1(X)$ son l.i. punto a punto, entonces definen una r-distribución.

Ej Sea $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$

Sea $S = \{ x \in X \ / \ \omega(x) = 0 \}$ cerrado

$\mathcal{U} = X - S$

Entonces $(\omega = 0) = \Delta$ es una distribución de rango $r = n-1$ en $\mathcal{U}$.

Más general, sea $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$

Decimos que ω anula Δ

si $\omega(\underbrace{\Delta, \dots, \Delta}_{p}) = 0$ o sea,

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_p) = 0, \quad \forall v_i \in \Delta(x)$$

Def Sea Δ una r-distrib. en X

$$\mathcal{I}(\Delta) = \{ \omega \in \mathcal{E}^*(X) \ / \ \omega \text{ anula } \Delta \}$$

(si $\omega = \sum_{i=0}^{p} \omega_i$, se pide que cada ω_i anule Δ)

Prop

(a) $\mathcal{I}(\Delta)$ es un ideal graduado de $\mathcal{E}^*(X)$, $\mathcal{I}(\Delta)_p \underset{def}{=} \mathcal{I}(\Delta) \cap \mathcal{E}^p(X)$

(b) $\mathcal{I}(\Delta)$ está localmente generado por $n-r$ 1-formas. l.i.

(c) Si $I \subset \mathcal{E}^*(X)$ es un ideal localmente generado por $n-r$ 1-formas l.i. entonces $\exists! \ \Delta \ / \ I = \mathcal{I}(\Delta)$
$\operatorname{rg} \Delta = r$

Dem Sup $\Delta = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ en U.

b) completo a una base $v_1, \dots, v_n$ en U.

Sea $w_1, \dots, w_n$ la base dual, $w_i \in \mathcal{E}^1(U)$

$\Rightarrow \quad \Delta = \bigcap_{i=r+1}^{n} \ker w_i \quad$ en U.

c) Dado I, tomo $\Delta = \ker I_1$ o sea,

$$\Delta(x) = \bigcap_{w \in I_1} \ker w(x)$$

$I_1 = I \cap \mathcal{E}^1(X)$

Por la hipótesis de que localmente

I está generado por $I_1 = \langle w_1, \dots, w_{n-r} \rangle$

resulta que Δ es una r-distribución.

~~Es claro que toda $w \in I$ anula Δ,~~

~~o sea, $I \subset \mathcal{J}(\Delta)$~~ y $I = \mathcal{J}(\Delta)$.

Def Sea $I \subset \mathcal{E}^*(X)$ un ideal.

Decimos que I es un ideal diferencial

si $d(I) \subset I$.

Prop Son equivalentes (para Δ una r-distrib.)

a) Δ es involutiva

b) $\mathcal{J}(\Delta)$ es un ideal diferencial.

Dem Vamos a usar que $\forall w \in \mathcal{E}^p(X)$

$$dw(v_0, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i\big(w(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p)\big)$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p)$$

a) $\Rightarrow$ b)

Sea $\omega \in \mathcal{I}(\Delta) \cap \mathcal{E}^p(X) = \mathcal{I}(\Delta)_p$

Quiero ver: $d\omega \in \mathcal{I}(\Delta)_{p+1}$

Sean $v_0, \dots, v_p \in \Delta$

Necesito ver que $d\omega(v_0, \dots, v_p) = 0$

Esto sale de la fórmula para $d\omega$

ya que $[v_i, v_j] \in \Delta$.

b) $\Rightarrow$ a) Sup. $\mathcal{I}(\Delta)$ es ideal diferencial

y sean $\omega_1, \dots, \omega_{n-r}$ generadores locales de $\mathcal{I}(\Delta)_1$

$\Rightarrow d\omega_i \in \mathcal{I}(\Delta)_2$

Sean $u, v \in \Delta$

$$d\omega(u,v) = u(\omega(v)) - v(\omega(u)) - \omega([u,v])$$

Para $\omega \in \mathcal{I}(\Delta)_1$, $u, v \in \Delta$ resulta

$$\omega([u,v]) = 0$$

$\Rightarrow [u,v] \in \Delta$ ✓

Obs La condición $d(I) \subset I$ significa

(si I está generado por $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in \mathcal{E}^1(X)$)

que $d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-r} \eta_{ij} \wedge \omega_j$, $\eta_{ij} \in \mathcal{E}^1(X)$.

Ej $r=1$

Sea Δ generado por ω.

Son equivalentes

a) $d\omega = \eta \wedge \omega$ para algún $\eta \in \mathcal{E}^1(X)$

b) $d\omega \wedge \omega = 0$ Se dice que ω es una 1-forma integrable

Ej Sea X var. $\mathcal{C}^\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ submersión

$\omega = df$ satisface $d\omega \wedge \omega = 0$ ya que $d\omega = 0$

Variedades integrales: $X_t = f^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Ej $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^n)$

puedo escribir condición de integrabilidad

(p. ej: $a_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$)

Aplicación ① demostración de la correspondencia de Lie

Sea G un grupo de Lie

$$\mathcal{V}(G)_{inv} \rightleftarrows TG(e)$$
$$v \longmapsto v(e)$$
$$v \longleftarrow v(0)$$

$$v(g) = dL_g(v(0))$$

Tengo $[\,,\,]$ en $\mathcal{V}(G)$, restringo a $\mathcal{V}(G)_{inv}$
transporto a $TG(e)$ $\rightsquigarrow$ álgebra de Lie de G.
$L(G) = (TG(e), [\,,\,])$

Si $\varphi : H \to G$ es un subgrupo
(H grupo de Lie, φ inmersión + morfismo de grupos)

entonces $d\varphi(e) : TH(e) \hookrightarrow TG(e)$
morfismo inyectivo de álgebras de Lie
$\Rightarrow$ $\operatorname{im} d\varphi(e) \subset TG(e)$ subálgebra de Lie
(subespacio lineal cerrado por $[\,,\,]$)

Recíprocamente:

Teo Sea $h \subset TG(e)$ una subálgebra de Lie.
Entonces $\exists$ subgrupo de Lie $\varphi : H \to G$
tal que $\operatorname{im} d\varphi(e) = h$.

Dem (sólo los pasos esenciales)
A partir de $h \subset TG(e)$ defino una
distribución en G : $\Delta(g) = dL_g(h) \subset TG(g)$
Δ

Se afirma:

a) Δ es involutiva

($\Rightarrow$ por Frobenius, $\exists!$ variedad integral $\varphi : H \to G$ que pasa por $e \in G$)

b) $\varphi : H \to G$ es un subgrupo de Lie

(o sea, H es grupo de Lie y φ es morfismo)

a) Sea $v_1(0), \dots, v_m(0)$ una base de $\mathfrak{h}$

Entonces $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \Delta$

~~Sea ...~~

$[v_i(0), v_j(0)] \in \mathfrak{h}$, $[v_i(0), v_j(0)] = \sum_k c_{ij}^k v_k(0)$

$\Rightarrow$ $[v_i, v_j] = \sum_k c_{ij}^k v_k$ $\Rightarrow$ $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ ✓

b) Necesito el resultado de Frobenius global:
$\exists$ variedad integral maximal.
- $\varphi(H) \subset G$ subgrupo, por la maximalidad.
- H grupo, φ morfismo, ver Warner.

Nota los c_{ij}^k se llaman "constantes de estructura" del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Aplicación (2) Estrategia para construcción de funciones vía Frobenius.

Problema: sean dadas variedades C^∞, X, Y

y sean $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in \mathcal{E}^1(X)$

$\omega_1,\dots,\omega_d \in \mathcal{E}^1(Y)$

Quiero construir $f: X \to Y$ C^∞ / $f^*\omega_i = \alpha_i$, $i=1,\dots,d$

Supongamos que tengo esta f.

Considero su grafo $\Gamma_f \subset X\times Y$, $\Gamma_f = \{(x,y) / y = f(x)\}$

$$\begin{tikzcd} & X\times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Defino $\mu_i = \pi_2^*\omega_i - \pi_1^*\alpha_i \in \mathcal{E}^1(X\times Y)$

Afirmo: Γ_f es variedad integral del sistema diferencial generado por $\mu_1,\dots,\mu_d$.

En efecto:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_f \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

conmuta

$f\circ\pi_1 = \pi_2$

$\Rightarrow \quad \pi_2^*\omega_i = (f\circ\pi_1)^*\omega_i = \pi_1^* f^*\omega_i = \pi_1^*\alpha_i$

$\Rightarrow \quad \mu_i = 0$ en Γ_f

Idea: para construir f, construyo Γ_f.

Tomo Γ_f = variedad integral de $\langle \mu_1,\dots,\mu_d\rangle$

1) verificar $\langle \mu_1,\dots,\mu_d\rangle$ ideal diferencial
2) Dado cualquier $(x_0,y_0) \in X\times Y$, existe variedad integral Γ que pasa por (x_0,y_0)

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & \Gamma \subset X\times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

3) Sup. $d = \dim Y$, $\omega_1^*, \dots, \omega_d$ base de TY^*

Entonces $\pi_1 : \Gamma \to X$ difeo. local.

Dem $\dim \Gamma = \dim (X \times Y) - d = \dim X$

Por Teo. función inversa, basta con ver $d\pi_1$ inyectiva en todo punto.

Sea $(x_0, y_0) \in \Gamma$, $v \in T\Gamma(x_0, y_0)$

Sup. $d\pi_1(x_0, y_0)(v) = 0$. Quiero ver: $v = 0$.

$T(X \times Y)(x_0, y_0) = TX(x_0) \oplus TY(y_0)$

$\Rightarrow v = (v_1, v_2)$

$\mu_i = 0$ en $\Gamma \Rightarrow \mu_i(v) = 0$

$\Rightarrow \omega_i(v_2) - \alpha_i(v_1) = 0$

$d\pi_1(x_0, y_0)(v) = v_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_i(v_1) = 0 \Rightarrow \omega_i(v_2) = 0 \quad \forall i \quad \underset{\{\omega_i\} \text{ base}}{\Rightarrow} v_2 = 0$ ✓

4)
$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

defino $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$

en dos situaciones

- localmente en X
- globalmente en X si simplemente conexo ($\Rightarrow \pi_1$ iso)

Prop Sean G, H grupos de Lie, G conexo.

Sean $\varphi : G \to H$, $\psi : G \to H$ morfismos.

Entonces $d\varphi(e) = d\psi(e) \iff \varphi = \psi$.

Dem Sean $w_1, \dots, w_m$ base de ~~$\mathfrak{gl}(H)$~~ las
$\Rightarrow)$ 1-formas invariantes de H.

$\Rightarrow$ $w_1(x), \dots, w_m(x)$ base de $TH(x)^*$, $\forall x \in H$.

Sea $\alpha_i = \varphi^* w_i$

Sabemos que $\Gamma_\varphi \subset G \times H$ es variedad integral

de $\mu_i = \pi_1^* \alpha_i - \pi_2^* w_i$, $i = 1, \dots, m$.

Del mismo modo, Γ_ψ es variedad integral

de $\mu'_i = \pi_1^* \alpha'_i - \pi_2^* w_i$, donde $\alpha'_i = \psi^* w_i$

Como $d\varphi(e) = d\psi(e)$, $\alpha_i = \alpha'_i \Rightarrow \mu_i = \mu'_i$

$\Rightarrow$ Γ_φ y Γ_ψ son variedades integrales del mismo sistema diferencial $\Rightarrow \Gamma_\varphi = \Gamma_\psi \Rightarrow \varphi = \psi$

Prop Sea $\varphi : G \to H$ morfismo de grupos de Lie.
G, H conexos.

Son equivalentes:

a) $d\varphi(e) : TG(e) \to TH(e)$ iso.

b) $d\varphi(x) : TG(x) \to TH(\varphi(x))$ iso $\forall x \in G$

c) φ es un revestimiento.

Dem Warner.

~~Warner~~

Aplicación:

Prop Sean G, H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$.
Sea $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morfismo de álgebras de Lie.
Si G es simplemente conexo, existe $f: G \to H$ (morfismo de grupos de Lie) tal que $df(e) = \varphi$.
(Por la Prop. anterior, f es único)

Dem Usamos la estrategia para construir funciones.

Sea $\omega_1, \dots, \omega_n$ base de las 1-formas invariantes a H. $(= \mathfrak{h}^*)$

Sea $\alpha_i = \varphi^* \omega_i \in \mathfrak{g}^*$,

$\mu_i = \pi_1^* \alpha_i - \pi_2^* \omega_i \in \mathcal{E}^1(G \times H)$

son 1-formas invariantes a $G \times H$

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c^i_{jk}\, \omega_k \wedge \omega_j \quad \text{(Maurer-Cartan)} \qquad [X_i, X_j] = \sum_k c^k_{ij} X_k$$

ideal diferencial: $\qquad d\omega(X,Y) = -\omega([X,Y])$

$$d\mu_i = d(\pi_1^* \varphi^* \omega_i - \pi_2^* \omega_i) = \pi_1^* \varphi^* d\omega_i - \pi_2^* d\omega_i$$

$$= \pi_1^* \varphi^* \sum_{j<k} c^i_{jk}\, \omega_k \wedge \omega_j - \pi_2^* \sum_{j<k} c^i_{jk}\, \omega_k \wedge \omega_j$$

$$= \sum_{j<k} c^i_{jk} \left(\pi_1^* \varphi^*(\omega_k) \wedge \pi_1^* \varphi^*(\omega_j) - \pi_2^*(\omega_k) \wedge \pi_2^*(\omega_j) \right)$$

$$= \sum_{j<k} c^i_{jk} \left(\pi_1^* \alpha_k \wedge \pi_1^* \alpha_j - \pi_2^* \omega_k \wedge \pi_2^* \omega_j \right)$$

$$= \sum_{j<k} c^i_{jk} \left(\pi_1^* \alpha_k \wedge \pi_1^* \alpha_j - \pi_2^* \omega_k \wedge \pi_1^* \alpha_j + \pi_2^* \omega_k \wedge \pi_1^* \alpha_j - \pi_2^* \omega_k \wedge \pi_2^* \omega_j \right)$$

$$= \sum_{j<k} c^i_{jk} \left(\mu_k \wedge \pi_1^* \alpha_j + \pi_2^* \omega_k \wedge \mu_j \right) \checkmark$$

Sea $\Gamma \subset G \times H$ la subvariedad integral maximal que pasa por (e,e) es un ~~[illegible]~~ grupo de Lie (ver dem. de correspondencia de Lie).

Habíamos visto que $p: \Gamma \to G$ ~~[illegible]~~ satisface $dp(e)$ iso

$\Rightarrow$ p es revestimiento. Como G es simplemente conexo,
Prop

p es iso $\Rightarrow$ $f = q \circ p^{-1}$ ✓

Conexiones vía distribuciones.

Referencia moral. Griffiths (Duke Math. J.)

Prop τ tensor, $v \in \mathfrak{X}(X)$ (*)

$L_v \tau = 0 \iff F_t^* \tau = \tau \quad \forall t$

(o sea, τ es invariante por el grupo $\{F_t\}$)

Cor $\tau = f \in \mathcal{D}(X)$, $L_v(f) = 0 \iff f =$ cte en órbitas (•)

Cor $u \in \mathfrak{X}(X)$, $v \in \mathfrak{X}(X)$. Son equivalentes:

- $L_v u = 0$
- $[v, u] = 0$
- $F_t \circ G_t = G_t \circ F_t \quad , \forall t \qquad \left(\begin{array}{l} v \leftrightarrow \{F_t\} \\ u \leftrightarrow \{G_t\} \end{array}\right)$

(•) f integral primera del flujo definido por v.

(*) **Dem** $L_v \tau = 0 \iff$ "$\tau =$ cte"

(*) $F_t^* L_v(\tau) = L_v F_t^*(\tau) \quad , \forall t$

(verificar)

sale de

$F_t^* F_s^*(\tau) = F_s^* F_t^*(\tau)$

$t+s = s+t$

$L_v(\tau) = 0 \rightarrow F$

Idea sobre ~~espacios~~ fibrados vectoriales y haces

Sea X una variedad (de dim finita)

Def Una familia de espacios vectoriales ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) parametrizados por X consiste de dar un espacio vectorial E_x para cada $x \in X$.

Denotamos $E = \coprod_{x \in X} E_x$, $\pi : E \to X$ proyección

$\pi(x, v) = x$

$(v \in E_x)$

Un campo de tipo E definido en $\mathcal{U} \subset X$ es una función $\sigma : \mathcal{U} \to E$ tal que $\sigma(x) \in E_x$ $\forall x \in \mathcal{U}$ (o sea, $\pi \circ \sigma = id$)

Obs Tenemos una función $\delta : X \to \mathbb{N}$

$\delta(x) = \dim E_x$

~~Def [illegible] localmente trivial~~

~~$\mathcal{U}$ = [illegible] vectorial [illegible]~~:

Def Sea E una familia, $\mathcal{U} \subset X$ abierto. Decimos que la familia es trivial en $\mathcal{U}$ si existen campos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ definidos en $\mathcal{U}$ tales que $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$ es base de E_x, $\forall x \in \mathcal{U}$.

(ojo: según esta def. todo E es trivial: para cada $x \in X$ elijo base $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$ de E_x ya que no hay condición de continuidad en los σ_i !)
ver corrección

Def Decimos que la familia E es localmente trivial si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que E es trivial en cada U_i.

($\Rightarrow$ δ es localmente constante)

Sea E familia localmente trivial.
Elijamos un cubrimiento $X = \bigcup_i U_i$
con $E|U_i$ trivial.
Elijamos $\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i$ base de E en U_i
(sup. X conexa, $\rightarrow$ $\delta = \text{cte} = n$)
En $U_i \cap U_j$ tengo dos bases $\longrightarrow$

$$\sigma_\alpha^i = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{ij} \sigma_\beta^j \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

$$a_{\alpha\beta}^{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{funciones}$$

Def Decimos que E es un fibrado vectorial diferenciable si las $a_{\alpha\beta}^{ij}$ son diferenciables (resp. analíticas, holomorfas, etc.)

Obs $a^{ij} = (a_{\alpha\beta}^{ij})_{\alpha,\beta}$ es ~~GL(n, Dif(U_i~~
es una matriz invertible cuyos elementos son funciones diferenciables en $U_i \cap U_j$

$GL(n, A) \qquad A = \text{Dif}(U_{ij}, \mathbb{R})$

Obs TX, TX^*, $S^m(TX^*)$, $\Lambda^m(TX^*)$, etc.
son fibrados vectoriales (del mismo tipo que X)
En cada caso podemos calcular las matrices de transición a_{ij} (con sus condiciones de compatibilidad)

Conexión
Def Sea X una variedad. Un fibrado vectorial sobre X es una variedad E + una aplicación diferenciable $\pi: E \to X$ tal que $\pi^{-1}(x) = E_x$ es un espacio vectorial. Se supone que es localmente trivial (misma def que antes, suponiendo las g_j^i son campos diferenciables)

Operaciones de álgebra lineal y multilineal se generalizan a fibrados vectoriales

$$\text{Ej, Ej:}\quad \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ X \end{array}, \quad \begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ X \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} E\oplus F \\ \downarrow \\ X \end{array} \qquad (E\oplus F)_x = E_x \oplus F_x$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} F/E \\ \downarrow \\ X \end{array} \qquad (F/E)_x = F_x / E_x$$

Ej fibrado normal de una subvariedad $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$

$$TX \hookrightarrow TY|_X \qquad N = TY|_X / TX$$

$$N_x = TY(x) / TX(x)$$

Dadas las funciones de transición (C^∞)
se puede construir el fibrado (C^∞)
vía pegado (escribir ejercicio para práctica)

Def. de prehaz

X espacio topológico.

Un prehaz (de conjuntos) en X consiste de asignar a cada abierto $U \subset X$ un conjunto $F(U)$ y a cada inclusión $U \subset V$ una aplicación

$$\rho_{V|U} : F(V) \to F(U) \quad \text{tal que}$$

para cada $U \subset V \subset W$

$$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[r, "\rho_{W|V}"] \arrow[dr, "\rho_{W|U}"'] & F(V) \arrow[d, "\rho_{V|U}"] \\ & F(U) \end{tikzcd}$$

Si cada $F(U)$ es un espacio vectorial y cada ρ es lineal, decimos que F es un prehaz de espacios vectoriales.

(grupos, etc.) Definir haz

Ej Sean $\pi : E \to X$ una aplicación continua.

Una sección de π es una aplicación continua $\sigma : X \to E$, $\pi\sigma = id_X$

Defino $F(U) = \{$ secciones continuas de $\pi : \pi^{-1}U \to U \}$

= prehaz de secciones continuas de π

= "campos de tipo E"

Si $\pi : E \to X$ es diferenciable, puedo definir el prehaz de secciones diferenciables.