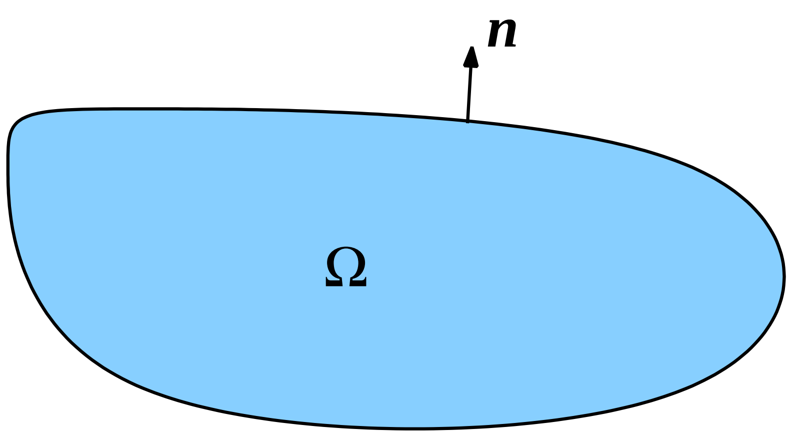
Vibraciones de una membrana. Problemas de autovalores para operadores diferenciales

- **Vibraciones libres de una membrana.**
- **Separación de variables. Problema de autovalores.**
- **Formulación variacional.**
- **Existencia de solución. Caracterización espectral.**
- **Solución del problema de vibraciones libres.**
- **Frecuencias naturales y modos propios de vibración.**
- **Vibraciones forzadas.**
- **Resonancia.**

Vibraciones libres de una membrana (1)



- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; dominio (abierto y conexo) plano ocupado por la membrana en equilibrio;
- $t \in [0, +\infty)$: tiempo;
- $U(x,t)$: desplazamiento vertical del punto $x = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ en el instante $t \geq 0$.

Notación

- $\dot{U}(x,t) := \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t); \quad \ddot{U}(x,t) := \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t);$
- $\Delta U(x,t) := \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x,t) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}(x,t).$

Vibraciones libres de una membrana (2)

Ecuaciones

- Ley de Newton (fuerza = masa x aceleración):

$$\rho \ddot{U}(x,t) = T \Delta U(x,t), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

ρ: densidad,

T: tensión de la membrana.

- Condiciones de contorno (membrana sujeta en todo el borde):

$$U(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

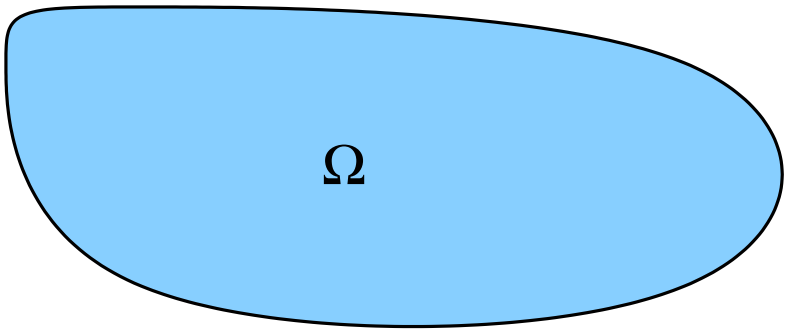
- Condiciones iniciales (desplazamiento inicial y partida del reposo):

$$U(x,0) = U_0(x) \text{ (dato)} \qquad \text{y} \qquad \dot{U}(x,0) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Vibraciones libres de una membrana (3)

Datos

- Geometría: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;



- Densidad: $\rho = 1$;
- Tensión: $T = 1$;
- Desplazamiento inicial:

$$U_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

$\big($tal que $U_0|_{\partial\Omega} = 0\big)$.

Ecuación Diferencial Parcial

El desplazamiento transversal de la membrana satisface el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

Hallar $U(x,t)$ *tal que*

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ U = U_0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \\ \dot{U} = 0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0. \end{cases}$$

Separación de variables. Problema de autovalores (1)

Buscamos soluciones no triviales (es decir, no identicamente nulas) de variables separadas

$$U(x,t) = u(x)v(t)$$

del problema anterior, sin atender a las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

$$\ddot{U}(x,t) = u(x)\, v''(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta U(x,t) = \Delta u(x)\, v(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta u(x)}{u(x)} = C \text{ (const.)} \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0,+\infty).$$

$$U = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0$$

$$\Longrightarrow u(x)v(t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0$$

$$\Longrightarrow u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Separación de variables. Problema de autovalores (2)

$$\frac{\Delta u}{u} = C \implies \begin{cases} -\Delta u + Cu = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $C > 0$, Lema de Lax-Milgram $\implies u \equiv 0$

$$\implies C < 0 \implies \exists \omega > 0 : \; C = -\omega^2 \implies$$

(ω^2, u) es solución del **problema de autovalores para (menos) el Laplaciano:**

Hallar $\omega > 0$ *y* $u \not\equiv 0$ *tales que*

$$\begin{cases} -\Delta u = \omega^2 u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

- ω: **frecuencia natural de vibración** de la membrana,
- u: **modo propio de vibración** de la membrana.

Formulación variacional

$$-\Delta u = \omega^2 u \implies -\int_\Omega \Delta u \, v = \omega^2 \int_\Omega uv \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Fórmula de Green:

$$-\int_\Omega \Delta u \, v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Problema variacional de autovalores

Hallar $\omega > 0$ *y* $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, *tales que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \omega^2 \int_\Omega uv \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Existencia de solución. Caracterización espectral (1)

Consideremos el *operador solución*

$$\begin{aligned} T:\ \mathrm{L}^2(\Omega) &\overset{\text{cont.}}{\to} \mathrm{H}^1_0(\Omega) \overset{\text{comp.}}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^2(\Omega), \\ f &\mapsto w, \end{aligned}$$

donde w es la solución del problema

$$w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega): \qquad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta w = f, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Éste es el *problema de cargas* de la membrana; vale decir, w es el desplazamiento vertical de la membrana sometida a una distribución de cargas $f(x)$.

Lema de Lax-Milgram $\Longrightarrow$ $\exists! w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ y $\|w\|_{1,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}$

$$\Longrightarrow\ T:\ \mathrm{L}^2(\Omega) \overset{\text{cont.}}{\to} \mathrm{H}^1_0(\Omega) \Longrightarrow T:\ \mathrm{L}^2(\Omega) \overset{\text{comp.}}{\to} \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Existencia de solución. Caracterización espectral (2)

λ autovalor de $T \iff \exists u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0 : \ Tu = \lambda u$.

Además, si $\lambda \neq 0$, entonces $u = \frac{1}{\lambda} T u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

$\lambda \neq 0$ autovalor de $T \iff \exists u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, tal que

$$\lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla (Tu) \cdot \nabla v = \int_\Omega uv \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

$$\iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega uv \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Además, escogiendo $u = v$,

$$\lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega u^2 \implies \lambda = \frac{\int_\Omega u^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2} > 0.$$

Por lo tanto, λ es un autovalor de $T \iff \lambda \neq 0$ y $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ es una frecuencia natural de vibración de la membrana. Además las autofunciones de T son los modos propios de vibración de la membrana.

Existencia de solución. Caracterización espectral (3)

El operador $T:\ \mathrm{L}^2(\Omega)\to\mathrm{L}^2(\Omega)$ es **autoadjunto**.

En efecto, sean $f,\ g\in\mathrm{L}^2(\Omega)$. Sean $w:=Tf$ y $z:=Tg$; es decir,

$$
\begin{aligned}
w\in\mathrm{H}_0^1(\Omega):&\qquad \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v=\int_\Omega fv\qquad \forall v\in\mathrm{H}_0^1(\Omega),\\
z\in\mathrm{H}_0^1(\Omega):&\qquad \int_\Omega \nabla z\cdot\nabla v=\int_\Omega gv\qquad \forall v\in\mathrm{H}_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f\,(Tg)=\int_\Omega fz=\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla z&=\int_\Omega \nabla z\cdot\nabla w\\
&=\int_\Omega gw=\int_\Omega wg=\int_\Omega (Tf)\,g.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $T:\ \mathrm{L}^2(\Omega)\to\mathrm{L}^2(\Omega)$ es autoadjunto.

Existencia de solución. Caracterización espectral (4)

Teorema. (Caracterización espectral de operadores compactos y autoadjuntos.)

- T admite una sucesión de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ todos de multiplicidad finita (es decir la dimensión de cada espacio propio $\left\{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \ Tu = \lambda_n u\right\}$ es finita).
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots > 0$ (donde cada autovalor se repite tantas veces como su multiplicidad) y $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.
- Las autofunciones correspondientes $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pueden escogerse de manera que resulten una base Hilbertiana de $\mathrm{L}^2(\Omega)$; es decir:

$$\int_\Omega u_n u_m = \delta_{nm},$$

$$\forall g \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \exists \alpha_n := \int_\Omega g u_n,\ n \in \mathbb{N} : \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonales en $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_m = \frac{1}{\lambda_n}\delta_{nm}.$

Existencia de solución. Caracterización espectral (5)

Corolario. El problema de vibraciones naturales de la membrana (autovalores de menos el Laplaciano):

- tiene una sucesión de frecuencias naturales de vibración $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, todas de multiplicidad finita.
- $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n \leq \ldots$ (donde cada frecuencia natural se repite tantas veces como su multiplicidad) y $\omega_n \xrightarrow{n} +\infty$.
- Los modos propios de vibración correspondientes $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constituyen una base Hilbertiana de $\mathrm{L}^2(\Omega)$; es decir:

$$\int_\Omega u_n u_m = \delta_{nm},$$

$$\forall g \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \exists \alpha_n := \int_\Omega g u_n,\ n \in \mathbb{N}: \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

- $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_m = \omega_n^2 \delta_{nm}.$

Solución del problema de vibraciones libres (1)

Recordemos que estamos buscando soluciones no triviales de variables separadas $U(x,t) = u(x)v(t)$ del problema

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

y que en tal caso se tiene

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta u(x)}{u(x)} = C \text{ (const.)} \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

con $C = -\omega_n^2$ para alguna de las frecuencias naturales ω_n, $n \in \mathbb{N}$.

Para cada frecuencia natural se tiene

$$v''(t) + \omega_n^2 v(t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$\Longrightarrow \; v(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t, \qquad \text{con } A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Solución del problema de vibraciones libres (2)

Cualquier combinación lineal de soluciones

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) u_n(x)$$

$\forall A_n,\ B_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, N$, $\forall N \in \mathbb{N}$, es solución del problema

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Del mismo modo, $\forall A_n,\ B_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, para los que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) u_n(x) =: U(x,t)$$

converja y las derivadas de la función $U(x,t)$ definida por la serie, $\dot{U}$, $\ddot{U}$ y ΔU, puedan calcularse derivando dentro de la sumatoria, esa función $U(x,t)$ es también solución de este problema.

Solución del problema de vibraciones libres (3)

En particular podemos escoger los coeficientes A_n y B_n, $n \in \mathbb{N}$, de manera que se cumplan las condiciones iniciales:

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x) = U_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}$$

$$\dot{U}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n u_n(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}$$

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana de $\mathrm{L}^2(\Omega)$, esto se cumple si y sólo si

$$A_n = \int_\Omega U_0 u_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$B_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Con estos coeficientes puede demostrarse lo que sigue:

Solución del problema de vibraciones libres (4)

Teorema. La solución del problema de vibraciones libres de una membrana sujeta en todo su borde y sometida a un desplazamiento inicial U_0,

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ U = U_0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \\ \dot{U} = 0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \end{cases}$$

es

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t \, u_n(x),$$

con

- ω_n: las frecuencias naturales de vibración de la membrana,
- u_n: los modos propios de vibración y
- $A_n = \int_\Omega U_0 u_n$ los coeficientes de Fourier de U_0 en la base Hilbertiana $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Frecuencias naturales y modos propios de vibración

Si el desplazamiento inicial es un modo propio de vibración,

$$U_0 = u_m,$$

entonces

$$A_n = \int_\Omega U_0 u_n = \int_\Omega u_m u_n = \delta_{mn}$$

y, consecuentemente,

$$U(x,t) = \cos \omega_m t \, u_m(x).$$

Es decir que la solución del problema de vibraciones libres es un movimiento oscilatorio armónico de frecuencia ω_m y amplitud u_m.

Por esa razón, a ω_n se las llama las **frecuencias naturales** y a u_n los **modos propios** de vibración de la membrana

Vibraciones forzadas (1)

Si sobre la membrana inicialmente en reposo actúa una densidad de fuerzas periódica en el tiempo con frecuencia ω y amplitud $f(x)$ (es decir, $f(x)\cos\omega t$), el problema de vibraciones forzadas resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} \ddot{U} = \Delta U + f(x)\cos\omega t, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ U = 0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \\ \dot{U} = 0, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0. \end{cases}$$

Para resolver este problema, basta encontrar una solución particular $U_{\mathrm{P}}(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \ddot{U}_{\mathrm{P}} = \Delta U_{\mathrm{P}} + f(x)\cos\omega t, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U_{\mathrm{P}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

independientemente de las condiciones iniciales.

Vibraciones forzadas (2)

En efecto, si escribimos

$$U(x,t) = U_{\mathrm{P}}(x,t) + U_{\mathrm{H}}(x,t),$$

$U_{\mathrm{H}}(x,t)$ resulta la solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} \ddot{U}_{\mathrm{H}} = \Delta U_{\mathrm{H}}, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U_{\mathrm{H}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ U_{\mathrm{H}} = -U_{\mathrm{P}}, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \\ \dot{U}_{\mathrm{H}} = -\dot{U}_{\mathrm{P}}, & x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \end{cases}$$

y éste es un problema de vibraciones libres que se resuelve como antes.

Vibraciones forzadas (3)

Veamos ahora como obtener una solución particular $U_{\mathrm{P}}(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \ddot{U}_{\mathrm{P}} = \Delta U_{\mathrm{P}} + f(x)\cos\omega t, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ U_{\mathrm{P}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana de $\mathrm{L}^2(\Omega)$, si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, entonces $\exists \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x), \qquad x \in \Omega.$$

Del mismo modo, para cada $t \in [0,+\infty)$, $\exists a_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$U_{\mathrm{P}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x).$$

Vibraciones forzadas (4)

Sustituyendo $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x)$,

$$\ddot{U}_{\mathrm{P}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) u_n(x),$$

$$\Delta U_{\mathrm{P}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \Delta u_n(x) = -\omega_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x),$$

en la ecuación diferencial

$$\ddot{U}_{\mathrm{P}} = \Delta U_{\mathrm{P}} + f(x) \cos \omega t,$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n''(t) + \omega_n^2 a_n(t) - \alpha_n \cos \omega t \right] u_n(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n''(t) + \omega_n^2 a_n(t) = \alpha_n \cos \omega t, \qquad t > 0.$$

Vibraciones forzadas (5)

Una solución particular de

$$a_n''(t) + \omega_n^2 a_n(t) = \alpha_n \cos \omega t, \qquad t > 0,$$

es

$$\text{si } \omega \neq \omega_n, \qquad a_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t,$$

$$\text{si } \omega = \omega_n, \qquad a_n(t) = \frac{\alpha_n t}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

En consecuencia, una solución particular del problema de vibraciones forzadas de la membrana es la siguiente:

$$U_{\mathrm{P}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x) \quad \text{con} \quad a_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t, & \text{si } \omega \neq \omega_n, \\ \dfrac{\alpha_n t}{2\omega^2} \sin \omega t, & \text{si } \omega = \omega_n. \end{cases}$$

Resonancia

Si la frecuencia ω de la fuente de excitación externa coincide con una de las frecuencias naturales de la membrana ω_{n_0}, la solución del problema de vibraciones forzadas de la membrana es

$$U(x,t) = U_{\mathrm{H}}(x,t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \, u_n(x) + \frac{\alpha_{n_0} t}{2\omega^2} \sin \omega t \, u_{n_0}(x).$$

Los dos primeros términos son acotados pero el último sumando tiene oscilaciones de amplitud creciente según $t \to +\infty$. En consecuencia, la amplitud de los desplazamientos de la membrana explota como este último sumando.

Este fenómeno se conoce como **resonancia**. Para evitarlo, es necesario conocer las frecuencias naturales de la membrana.