Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 9: Teoremas clásicos de estructura

Módulos y anillos semisimples

1. Sean A un anillo y M un A-módulo semisimple. Probar que son equivalentes:

(*a*) M es finitamente generado.
(*b*) M es suma directa finita de submódulos simples.
(*c*) M es noetheriano.
(*d*) M es artiniano.

2. Sea A un anillo semisimple. Probar que si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos sobreyectivo, entonces B es semisimple.

3. Sean A un anillo conmutativo y M y N dos A-módulos. Mostrar que si M o N es semisimple, entonces $M \otimes_A N$ es semisimple.

4. *Anillos de matrices.*

(*a*) Sean A y B anillos y $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $M_m(M_n(A)) \cong M_{mn}(A)$ y $M_n(A \times B) \cong M_n(A) \times M_n(B)$.
(*b*) Probar que si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M_n(A)$ es semisimple.

5. Sea $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix} \right) \in M_2\mathbb{C} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$. Decidir si A es un anillo semisimple.

Álgebras de grupo

6. Encontrar la descomposición de Wedderburn para $\Bbbk[\mathbb{Z}_n]$ con $\Bbbk \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Sugerencia. Sugerencia: $\Bbbk[\mathbb{Z}_n] \cong \Bbbk[X]/\langle X^n - 1 \rangle$.

7. Mostrar que si $\Bbbk \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $\Bbbk[S_3] \cong \Bbbk \times \Bbbk \times M_2(\Bbbk)$.

8. Encontrar la descomposición de Wedderburn para $\Bbbk[D_4]$ con $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

9. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo de los cuaterniones. Mostrar que

$$\mathbb{Q}[Q] \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{H}_{\mathbb{Q}},$$
$$\mathbb{R}[Q] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}},$$
$$\mathbb{C}[Q] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}).$$

Aquí $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ es el anillo de cuaterniones reales y $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ es el análogo definido sobre $\mathbb{Q}$.

Módulos finitamente generados sobre un dominio principal

10. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ no es un dominio de factorización única. Encontrar ideales no principales en este anillo.

11. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5.

12. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

13. Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

14. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes grupos abelianos:

(*a*) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

(*b*) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

(*c*) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

(*d*) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(*e*) Un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(*f*) Un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

15. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

(*a*) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 : m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0,\ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

(*b*) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 : m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

(*c*) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 : m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

16. Caracterizar los $\Bbbk[X]$-módulos de dimensión 1, 2 y 3 sobre $\Bbbk$, para $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

17. Sea $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(*a*) Probar que $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito si y solo si G tiene rango n.

(*b*) Si G tiene rango n y $\{g_1, \ldots, g_n\}$ es una base de g, sea $M \in M_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a g_i como i-ésima columna. Probar que $[\mathbb{Z}^n : G] = \det M$.

18. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle (x^2+1)^2 \rangle$ y $J = \langle x^2 + 1 \rangle \trianglelefteq A$. Probar que todo A–módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m, n).