Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2016
Práctica 8: Producto tensorial y localización de módulos

Producto tensorial

1. Sean A un $\mathbb{Z}$-módulo de torsión y D un $\mathbb{Z}$-módulo divisible. Probar que $A \otimes_{\mathbb{Z}} D = 0$.

2. Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

3. Sea A un anillo conmutativo y sean $I, J \trianglelefteq A$.

(*a*) Probar que $(A/I) \otimes_A (A/J) \cong A/(I+J)$.

(*b*) Concluir que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, con $d = \mathrm{mcd}(m,n)$.

4. Sean A un anillo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal bilátero y M un A-módulo a izquierda. Mostrar que existe un isomorfismo $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

5. Sean A y B anillos, M un A-módulo a derecha, N un A-B-bimódulo y P un B-módulo a izquierda. Probar que:

(*a*) $M \otimes_A N$ es un B-módulo a derecha;

(*b*) $N \otimes_B P$ es un A-módulo a izquierda;

(*c*) existe un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

6. Sea N un A-módulo a izquierda y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos a derecha. Probar que existe un isomorfismo natural

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes N \cong \bigoplus_{i\in I} M_i \otimes N.$$

7. Sean A un anillo, M un A-módulo a derecha y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M tal que $M = \sum_{i\in I} M_i$. Probar que si N es un A-módulo a izquierda tal que $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$ entonces $M \otimes_A N = 0$.

8. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales. Hallar una base de $V \otimes_{\Bbbk} W$ en función de bases de V y W. Concluir que si V y W son de dimensión finita, también lo es su producto tensorial.

9. Sea A un anillo conmutativo y sean M y N dos A-módulos.

(*a*) Probar que si M y N son finitamente generados, entonces $M \otimes_A N$ también lo es.

(*b*) Probar que si M y N son proyectivos, entonces $M \otimes_A N$ también lo es.

10. *Producto tensorial de álgebras.* Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean A y B dos $\Bbbk$-álgebras. Mostrar que la fórmula

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

define una estructura de $\Bbbk$-álgebra en $A \otimes_{\Bbbk} B$. (¡Probar que ese producto está bien definido!)

11. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, A una $\Bbbk$-álgebra y n, $m \in \mathbb{N}$. Probar que existen isomorfismos de álgebras:

(*a*) $A[X] \cong \Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} A$;

(*b*) $M_n(A) \cong M_n(\Bbbk) \otimes_{\Bbbk} A$;

(*c*) $M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_{\Bbbk} M_m(A)$.

Módulos playos

12. Sea A un anillo.

(*a*) Probar que todo A-módulo libre es playo.

(*b*) Probar que todo sumando directo de un A-módulo playo es playo.

(*c*) Concluir que todo A-módulo proyectivo es playo.

13. Sean A un anillo conmutativo y M y N A-módulos playos. Probar que $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

†**14.** Sea

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

una sucesión exacta de A-módulos a izquierda con M'' playo. Probar que para todo A-módulo a derecha N la sucesión

$$0 \to N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$$

es exacta.

Localización de módulos

En esta sección A es un anillo y $S \subseteq A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado. El morfismo natural $A \to A_S$ nos permite ver a cualquier A_S-módulo como un A-módulo.

15. *Localización de módulos.* Sea M un A-módulo a izquierda. Probar que:

(*a*) Existen un A_S-módulo a izquierda M_S y un morfismo de A-módulos $j_M : M \to M_S$ con la siguiente propiedad universal: dado un A_S-módulo a izquierda N y un morfismo de A-módulos $f : M \to N$, existe un único morfismo de A_S-módulos $\overline{f} : M_S \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \\ M_S \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Equivalentemente: para todo A_S-módulo a izquierda N, la aplicación $\mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $f \mapsto f \circ j_M$, es una biyección.

(*b*) El módulo M_S es isomorfo a $A_S \otimes_A M$ como A_S-módulo.

(*c*) Si para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \to M_S$ es un isomorfismo.

(*d*) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, existe un único morfismo $f_S : M_S \to N_S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\ M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S \end{tikzcd}$$

16. Sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Probar que $M_S = 0$ si y solo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$. ¿Qué ocurre si M no es finitamente generado?

17. *Exactitud de la localización.* Probar que para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

el diagrama obtenido al localizar en S

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A_S-módulos. Concluir que A_S es un A-módulo playo.

18. Sea M un A-módulo a izquierda. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si M es libre entonces M_S es libre como A_S-módulo.
(*b*) Si M es proyectivo entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.
(*c*) Si M es finitamente generado entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

19. Sea M un A-módulo y sean $P, Q \subseteq M$ submódulos. Probar que:

(*a*) $(P+Q)_S = P_S + Q_S$;
(*b*) $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$;
(*c*) $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.