

---

# ÁLGEBRA II

## Primer Cuatrimestre — 2016

### Práctica 5: Módulos - Primera parte

---

En toda la guía  $\mathbb{k}$  es un cuerpo.

#### Módulos y morfismos

1. Determinar en cada uno de los siguientes casos si la acción del anillo  $A$  sobre el grupo abeliano  $M$  dada está bien definida, y si hace de  $M$  un  $A$ -módulo.

- (a)  $A = M_n(\mathbb{k})$ ,  $M = \mathbb{k}^n$ , donde  $B \cdot v = Bv$  para todos  $B \in M_n(\mathbb{k})$  y  $v \in \mathbb{k}^n$ .
- (b)  $A = M_n(\mathbb{k})$ ,  $M = \mathbb{k}$ , donde  $B \cdot v = \det(B)v$  para todos  $B \in M_n(\mathbb{k})$  y  $v \in \mathbb{k}$ .
- (c)  $A = \mathbb{k}[X]$  y  $M = \mathbb{k}^n$ , con  $p \cdot (a_1, \dots, a_n) = (p(1)a_1, \dots, p(n)a_n)$  para todo  $p \in \mathbb{k}[X]$  y todos  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ .
- (d)  $A = \mathbb{Z}_k$ ,  $M = \mathbb{Z}_n$ , con  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \in \mathbb{Z}_n$  para todos  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_k$  y  $\bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ .

2. Sean  $A$  un anillo,  $m, n \geq 1$  y  $M \in M_{n,m}(A)$ . Mostrar que la multiplicación matricial da un morfismo de  $A$ -módulos

$$f : x \in A^n \mapsto xM \in A^m.$$

¿Es cierto que todo morfismo  $f : A^n \rightarrow A^m$  está dado por multiplicar por una matriz?

3. Clasificar salvo isomorfismo todos los  $\mathbb{C}[X]$ -módulos de dimensión 1 sobre  $\mathbb{C}$ .

4. Sea  $A$  un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Sea  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. El producto  $M \times A^{\text{op}} \rightarrow M$  dado por  $m \cdot a = am$ , define en  $M$  una estructura de  $A^{\text{op}}$ -módulo a derecha. Lo notamos  $M^{\text{op}}$ .
- (b) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda, entonces  $f : M^{\text{op}} \rightarrow N^{\text{op}}$  es un morfismo de  $A^{\text{op}}$ -módulos a derecha.
- (c) Recíprocamente, todo  $A^{\text{op}}$ -módulo a derecha es de la forma  $M^{\text{op}}$  para algún  $A$ -módulo a izquierda  $M$  y todo morfismo de  $A^{\text{op}}$ -módulos está inducido como en la parte anterior.

5. Sean  $N$  y  $M$  dos  $\mathbb{Q}$ -módulos. Mostrar que una función  $f : N \rightarrow M$  es un morfismo de  $\mathbb{Q}$ -módulos si y solo si es un morfismo de grupos abelianos.

6. Sean  $A$  un anillo y  $N, M$  dos  $A$ -módulos.

(a) Mostrar que  $\text{Hom}_A(M, N)$  es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad \text{para todos } f, g \in \text{Hom}_A(M, N), m \in M.$$

(b) Sea  $Z(A)$  el centro de  $A$ . Definimos una operación

$$Z(A) \times \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N),$$

de la siguiente manera: dados  $a \in Z(A)$ ,  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ , la función  $af$  está dada por

$$(a \cdot f)(m) = f(am)$$

para cada  $m \in M$ . Mostrar que esta operación define una estructura de  $Z(A)$ -módulo sobre  $\text{Hom}_A(M, N)$ .

7. Sean  $A, B$  y  $C$  anillos y sean  $M$  un  $(A, B)$ -bimódulo y  $N$  un  $(A, C)$ -bimódulo.

- (a) Mostrar que  $\text{Hom}_A(M, N)$  posee una única estructura de  $(B, C)$ -bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c$$

para todos  $b \in B, c \in C$  y  $m \in M$

- (b) Considerando al anillo  $A$  como  $(A, A)$ -bimódulo, mostrar que  $\text{Hom}_A(A, M) \cong M$  como  $A$ -módulos.

**8. Cambios de anillo.** Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) La operación  $A \times B \rightarrow B$  dada por  $(a, b) \mapsto \phi(a)b$  hace de  $B$  un  $A$ -módulo a izquierda. De forma similar podemos obtener una estructura de  $A$ -módulo a derecha y de  $A$ -bimódulo sobre  $B$ .
- (b) Sea  $M$  un  $B$ -módulo a izquierda. El producto  $A \times M \rightarrow M$  dado por  $a \cdot m = \phi(a)m$  hace de  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. Lo notamos  $\phi^*(M)$ .
- (c) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $B$ -módulos a izquierda, entonces  $f : \phi^*(M) \rightarrow \phi^*(N)$  es un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda. Lo notamos  $\phi^*(f)$ .
- (d) Si  $M$  y  $N$  son  $B$ -módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \text{Hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \text{Hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

- (e) Si  $M, N$  y  $P$  son  $B$ -módulos a izquierda y  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow P$  son morfismos de  $B$ -módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular la aplicación  $\phi^* : \text{End}_B(M) \rightarrow \text{End}_A(\phi^*(M))$  es un morfismo de anillos.

- (f) Dar condiciones sobre  $\phi$  que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \text{Hom}_B(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva o sobreyectiva cualesquiera sean los  $B$ -módulos  $M$  y  $N$ .

- (g) Si  $\psi : B \rightarrow C$  es otro morfismo de anillos, entonces  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$

**9.** Sean  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda y  $B = \text{End}_A(M)$  el anillo de endomorfismos de  $M$ .

- (a) Mostrar que  $M$  es un  $B$ -módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta ser un  $(A, B)$ -bimódulo.
- (b) ¿Qué relación hay entre  $A$  y  $\text{End}_B(M)$ ?

**10.** Sea  $A$  un anillo.

- (a) Sea  $f : M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda. Para cada  $A$ -módulo a izquierda  $P$  definimos aplicaciones

$$f_P^* : g \in \text{Hom}_A(M', P) \mapsto g \circ f \in \text{Hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \text{Hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \text{Hom}_A(P, M').$$

Probar que son morfismos de grupos abelianos.

- (b) Sean  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : M' \rightarrow M''$  morfismos de  $A$ -módulos. Probar que para cada  $A$ -módulo a izquierda  $P$  valen las fórmulas

$$\begin{aligned} f_P^* \circ g_P^* &= (g \circ f)_P^*, \\ g_*^P \circ f_*^P &= (g \circ f)_*^P. \end{aligned}$$

(c) Probar que una sucesión de  $A$ -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta si y solo si la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{Hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo  $A$ -módulo a izquierda  $N$ . ¿Hay algún enunciado similar que involucre a los morfismos  $f_N^*$  y  $g_N^*$ ?

(d) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

**11.** Probar que un  $A$ -módulo  $M$  es simple si y solo si  $Am = M \setminus \{0\}$ .

**12.** *Lema de Schur.*

(a) Sea  $f : M \rightarrow N$  un morfismo de  $A$ -módulos. Probar las siguientes afirmaciones.

1. Si  $M$  es simple, entonces  $f$  es o bien nula o bien inyectiva.
2. Si  $N$  es simple, entonces  $f$  es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si  $M$  y  $N$  son simples, entonces  $f$  es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Probar que si  $M$  es un  $A$ -módulo simple entonces  $\text{End}_A(M)$  es un anillo de división. ¿Vale la vuelta?

**13.** Sea  $A$  un dominio íntegro y sean  $v_1, \dots, v_n \in A^n$ . Sea  $M \in M_n(A)$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ . Probar las siguientes afirmaciones

- (a) El conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si y solo si  $\det M \neq 0$ .
- (b) El conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un sistema de generadores si y solo si  $\det M \in A^\times$ .

**14.** *Conjuntos minimales de generadores.* Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.
- (b) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe un conjunto generador minimal de  $\mathbb{Z}$  de cardinal  $n$ .

**15.** Sean  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda.

- (a) Probar que el conjunto  $\text{ann } M = \{a \in A : am = 0 \text{ para cada } m \in M\}$  es un ideal a izquierda de  $A$ . Si  $\text{ann } M = 0$ , decimos que  $M$  es un  $A$ -módulo *fiel*.
- (b) Probar que  $A$  es fiel como  $A$ -módulo y encontrar más ejemplos de módulos fieles.

**16.** Probar que un  $A$ -módulo es finitamente generado si y solo si es isomorfo a un cociente de  $A^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

**17.** Probar que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos a izquierda y  $M'$  y  $M''$  son finitamente generados, entonces  $M$  es finitamente generado.

**18.** Sean  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de dimensión infinita y  $A = \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  el anillo de endomorfismos de  $V$ . Mostrar que existe un  $A$ -módulo  $M$  no nulo tal que  $M \cong M \oplus M$ .

## Representaciones

19. Sean  $A$  una  $\mathbb{k}$ -álgebra y  $V$  un  $A$ -módulo.

- (a) Sea  $\phi : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  la función que asigna a cada  $a \in A$  la transformación  $\mathbb{k}$ -lineal dada por multiplicar a izquierda por  $a$ . Probar que  $\phi$  está bien definida y es un morfismo de anillos.
- (b) Probar que, recíprocamente, todo morfismo de anillos  $\phi : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  define una estructura de  $A$ -módulo sobre  $V$ .

Un morfismo de anillos  $\phi : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  se llama una *representación* de  $A$  de dimensión  $\dim V$ .

- (c) Sea  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y sea  $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Muestre que existe exactamente una estructura de  $\mathbb{k}[X]$ -módulo a izquierda sobre  $V$  para la cual  $\mathbb{k} \subset \mathbb{k}[X]$  actúa por multiplicación escalar y  $X \cdot v = f(v)$  para todo  $v \in V$ .

20. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $C(n) = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) \mid AB - BA = 0\}$ . El grupo  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  actúa sobre  $C(n)$  por conjugación, de forma que

$$P \cdot (A, B) = (PAP^{-1}, PBP^{-1})$$

para cada  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$  y  $(A, B) \in C(n)$ .

- (a) Probar que para cada  $(A, B) \in C(n)$  la asignación  $(X, Y) \mapsto (A, B)$  induce un morfismo de anillos  $\mathbb{k}[X, Y] \rightarrow M_n(\mathbb{k})$ , y por lo tanto una estructura de  $\mathbb{k}[X, Y]$ -módulo sobre  $\mathbb{k}^n$ . Notamos por  $V(A, B)$  al módulo así definido.
- (b) Probar que  $V(A, B) \cong V(A', B')$  como  $\mathbb{k}[X, Y]$ -módulos si y solo si  $(A, B)$  y  $(A', B')$  pertenecen a la misma órbita por la acción de  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ . Concluir que hay una biyección entre los  $\mathbb{k}[X, Y]$ -módulos de dimensión  $n$  y las órbitas de la acción de  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  sobre  $C(n)$ .

## Algunos lemas usuales

21. (a) Sea

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de  $A$ -módulos a izquierda en el cual las filas son exactas. Probar que existe exactamente un morfismo  $f'' : M'' \rightarrow N''$  que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

- (b) Si  $f'$  y  $f$  son isomorfismos, entonces  $f''$  es un isomorfismo.

22. *Lema de los cinco.* Consideremos el diagrama conmutativo de  $A$ -módulos a izquierda

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

y supongamos que las dos filas son exactas. Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $\alpha_1$  es sobreyectivo y  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  son inyectivos, entonces  $\alpha_3$  es inyectivo.
- (b) Si  $\alpha_5$  es inyectivo y  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  son sobreyectivos, entonces  $\alpha_3$  es sobreyectivo.
- (c) Si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  y  $\alpha_5$  son isomorfismos, entonces  $\alpha_3$  es un isomorfismo.

23. *Lema de los nueve.* Consideremos el diagrama de  $A$ -módulos a izquierda

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

en el cual las tres columnas y las dos primeras (resp. las dos últimas) filas son exactas. Probar que la tercera (resp. primera) fila también es exacta.