
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 4: Localización

En toda esta práctica los anillos son conmutativos.

1. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) Si $S \subseteq \mathcal{U}(A)$ entonces $A_S \cong A$.
- (b) Si $0 \in S$ entonces $A_S \cong 0$.

2. Sean A un anillo, $f \in A$ y $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Probar que $S \subseteq A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado y que

$$A_S \cong A[X]/(Xf - 1).$$

3. Sean A un anillo, $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subseteq A$ un ideal. Sea \bar{S} la imagen de S por la aplicación canónica $A \rightarrow A/I$. Probar que $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

4. Sean A un anillo, $S, T \subseteq A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$. Probar que $U = \{st : s \in S, t \in T'\}$ es un subconjunto de A multiplicativamente cerrado y que $(A_S)_{T'} \cong A_U$.

5. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

- (a) Supongamos que A es un dominio de integridad. Mostrar que la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$ es inyectiva.
- (b) Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$ sea inyectiva.

6. Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Mostrar que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$.

[†]7. Sea X un espacio métrico y sea $A = C(X)$ el anillo de las funciones continuas $X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que para cada $x_0 \in X$ el conjunto $S(x_0) = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$ es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \rightarrow A_S$?

8. Sean $A = C(\mathbb{R})$, $U = (0, 1)$ y $S = \{f \in A : f \text{ no se anula en el intervalo } (0, 1)\}$.

- (a) Probar que S es multiplicativamente cerrado en A .
- (b) Sea $r : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(U)$ la restricción de funciones. Mostrar que existe un único morfismo $\bar{r} : C(\mathbb{R})_S \rightarrow C(U)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}) & \xrightarrow{r} & C(U) \\ \text{can} \downarrow & \nearrow \bar{r} & \\ C(\mathbb{R})_S & & \end{array}$$

- (c) Mostrar que \bar{r} es un isomorfismo.

[†]9. Sean A un anillo, $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y $f : A \rightarrow A_S$ la aplicación canónica.

- (a) Mostrar que si $I \subseteq A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A . De esta forma se obtiene una aplicación $f^* : \text{Id}(A_S) \rightarrow \text{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A .

- (b) Mostrar que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.
 - (c) Si $J \subseteq A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J .
 - (d) Mostrar que $f^*(\text{Spec } A_S) \subseteq \text{Spec } A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.
- [†]10. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de \mathbb{Z} correspondiente. Mostrar que si $I \subseteq \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$.